Razonamiento Matemático

Cuarto grado de Secundaria

Editorial San Marcos

Lexicom

Intelectum EVOLUCIÓN

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Razonamiento matemático
Cuarto grado de Secundaria
Colección Intelectum Evolución

RUC 20545774519
Jr. Dávalos Lissón 135, Cercado de Lima
Teléfonos: 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
Fax: 330 - 2405
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com
www.editorialsanmarcos.com

Responsable de edición:
Yisela Rojas Tacuri

Equipo de redacción y corrección:
Eder Gamarra Tiburcio / Jhonatan Peceros Tinco
Josué Dueñas Leyva / Saby Camacho Martinez
Óscar Díaz Huamán

Diseño de portada:
Miguel Mendoza Cruzado / Cristian Cabezudo Vicente

Retoque fotográfico:
Luis Armestar Miranda

Composición de interiores:
Miguel Lancho / Carol Clapés Hurtado / Melissa Chau /
Cristian Cabezudo / Vilma Jacquelín Añazco /
Lourdes Zambrano Ibarra

Gráficos e Ilustraciones:
Juan Manuel Oblitas / Ivan Mendoza Cruzado

Primera edición: 2013
Tiraje: 9000

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2013-18811
ISBN: 978-612-313-116-6
Registro de Proyecto Editorial N.° 31501001300694

Impreso en Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Av. Garcilaso de la Vega 978 - Lima.
Teléfonos 331-1535 / 331-0968 / 332-3664
E-mail: ventas_escolar@edicioneslexicom.com

Impresión:
En los talleres de la Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.º 220, Santa Angélica, Lima - ATE
RUC 20136492277

La Colección Intelectum Evolución para Secundaria ha sido concebida a partir de los lineamientos pedagógicos establecidos en el Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular, además se alinea a los patrones y estándares de calidad aprobados en la Resolución Ministerial N.º 0304-2012-ED.

La divulgación de la Colección Intelectum Evolución se adecúa a lo dispuesto en la Ley 29694, modificada por la Ley N.º 29839, norma que protege a los usuarios de prácticas ilícitas en la adquisición de material escolar.

El docente y el padre de familia orientarán al estudiante en el debido uso de la obra.

INTELECTUM

Razonamiento matemático

Presentación

El vocablo *razonamiento* proviene del verbo *razonar* que significa 'inferir, conjeturar ordenando ideas en la mente para llegar a una conclusión'.

De esta manera podemos afirmar que el razonamiento matemático es aquella disciplina académica que basada en los conocimientos de la matemática busca desarrollar las aptitudes y las habilidades lógicas de los estudiantes para deducir una solución a un problema, para sacar una consecuencia de algo por indicios y conducir a un resultado.

Teniendo en consideración cuán importante es potenciar las habilidades, hemos elaborado el libro de Razonamiento matemático como un instrumento pedagógico que conllevará a esta meta. La estructura de cada libro está diseñada de acuerdo a los nuevos lineamientos de la educación cuyo objetivo es que todos desarrollen la capacidad de pensar, creativa y críticamente y procesen de manera exitosa los conocimientos.

Nuestra propuesta pedagógica se inicia con páginas binarias conformadas por una lectura de contexto matemático que motivará al estudiante a conectarse con este conocimiento al corroborar que le servirá y le será imprescindible en su vida actual y futura. Complementan las binarias la sección *Matemática recreativa*, que propone un problema cuyas pautas para solucionarlo se darán a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos).

Continúa el *Marco teórico* desarrollado de manera clara y precisa en cuatro unidades, que tienen como soporte los problemas resueltos, donde desarrollamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades específicas del estudiante.

Todo este marco teórico es aplicado a la práctica a través de dos secciones:

Actividades de razonamiento, para que el estudiante inicie la aplicación del conocimiento procesado. Al final de cada actividad hay un reto. Y la sección *Refuerza practicando*, que afianzará aún más la práctica con problemas propuestos por niveles, para que el avance sea de modo progresivo y se pueda ser capaz de afrontar nuevos y grandes retos.

Todo lo propuesto en la colección contiene situaciones de aprendizaje variadas que permitirán obtener resultados cualitativos y cuantitativos en el proceso cognoscitivo de los estudiantes.

Nuestro firme propósito es formar jóvenes capacitados, preparados, competitivos, eficientes y eficaces.

¡A esforzarse y a triunfar!

Estructura del libro

Página que inicia la unidad

Conformada por una lectura matemática de contexto cotidiano que conducirá al estudiante a una motivación concreta al comprobar que la matemática está asociada a su entorno real.



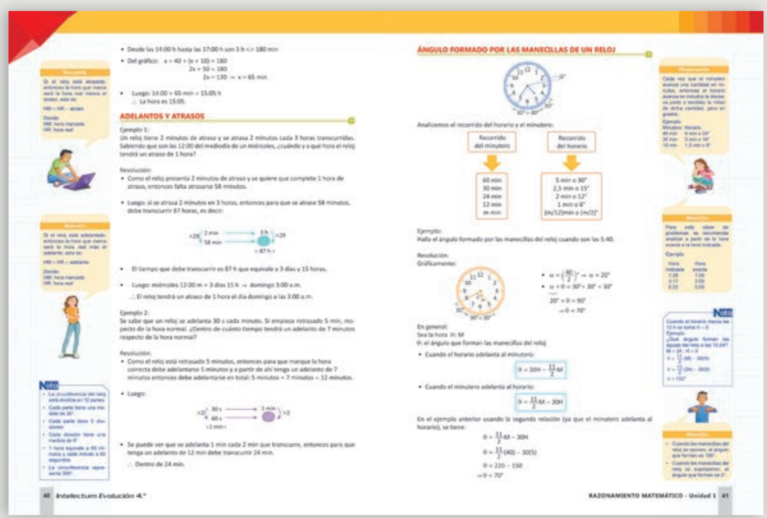


Matemática recreativa

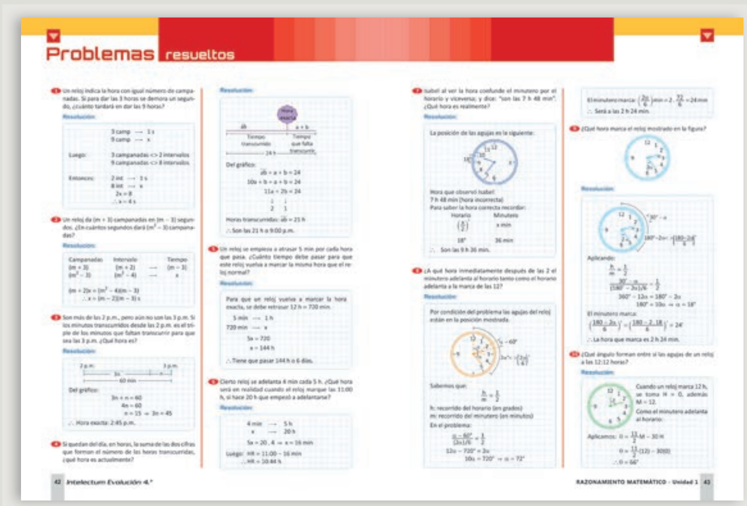
Sección que inicia de manera entretenida y divertida los conocimientos con un problema matemático que a través de un diálogo entre los personajes de la colección (mediadores cognitivos) se proporcionarán las pautas para solucionarlo.

Contenido teórico

Compuesto por una variedad de conocimientos enfocados en el razonamiento aritmético, razonamiento algebraico y razonamiento geométrico los que a su vez ponen en práctica el razonamiento lógico abstracto, el razonamiento operativo y el razonamiento organizativo. El desarrollo de cada tema se ha hecho con criterio pedagógico teniendo en cuenta el grado académico.





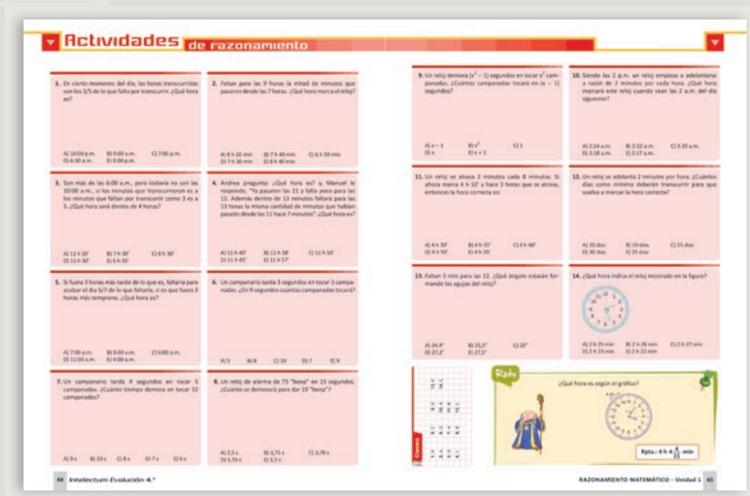


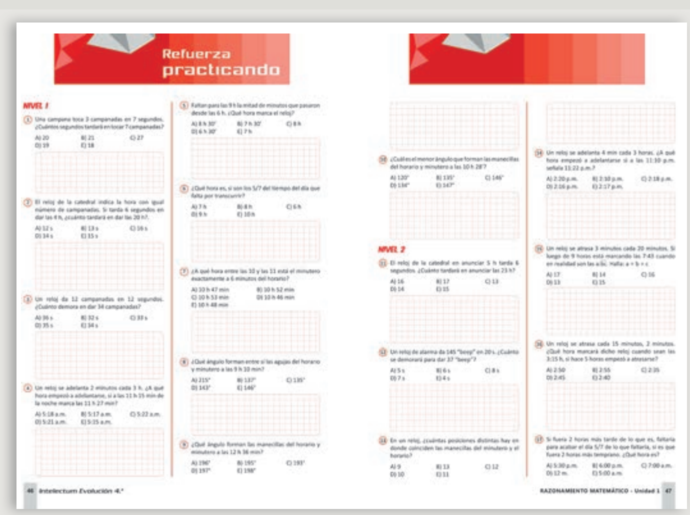
Problemas resueltos

Gran cantidad de problemas desarrollados por tema donde aplicamos diversas estrategias que entrenarán las capacidades del estudiante.

Actividades de razonamiento

Actividades propuestas para que el estudiante empiece su entrenamieto del conocimiento procesado; son actividades elaboradas también por tema. Al final de cada actividad hay un reto que el alumno debe intentar resolver.





Refuerza practicando

Problemas clasificados en niveles con la finalidad de que el alumno refuerce en forma progresiva y llegue preparado para enfrentarse a grandes y nuevos retos.

Contenido

UNIDAD 1



Lagartija "Jesucristo"

El basilisco tiene el apodo de Lagartija de Jesucristo o Lagartija Jesús porque al huir de un depredador, toma suficiente impulso (velocidad de impulso aproximadamente 1,5 m/s) como para correr sobre el agua por una distancia breve, alcanzando las más jóvenes, velocidades de hasta 3 m/s. Esto lo logran debido a que tienen dedos largos con membranas de piel que les permite tener una mayor área de contacto con el agua. Al correr rápidamente, azotan sus pies contra el agua creando pequeñas burbujas de aire que les ayudan a mantenerse a flote. Esta lagartija vive en los bosques tropicales de Centro América, desde México hasta Panamá. Generalmente viven en los árboles, cerca de cuerpos de agua.

Matemática recreativa

Investigación criminal

El Sr. Fernández se dio cuenta al llegar a su oficina, que había dejado, entre las páginas del libro que estaba leyendo, un billete de 50 euros. Preocupado, de que no fuese a extraviarse, llamó a su casa y le dijo a la empleada que le diese el libro que contenía el billete, a su chofer, que iría a recogerlo. Cuando el chofer se lo trajo, el billete había desaparecido. Al tomar declaración al chofer y a la empleada, esta última dijo que comprobó personalmente que el billete estaba dentro del libro cuando se lo dio al chofer, precisamente entre las páginas 99 y 100. A su vez el chofer declaró que al darle el libro la empleada, él miró el reloj y vio que eran las 9:30 a. m., dirigiéndose a la oficina del Sr. Fernández, situada a 500 m, adonde llegó a las 9:45 a. m..

¿Quién miente de los dos?





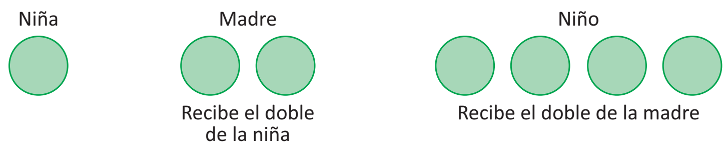
Planteo de ecuaciones

DEFINICIÓN

El arte de plantear ecuaciones es una habilidad sumamente importante para la resolución de problemas, para ello tenemos que traducir un problema dado en un lenguaje convencional, al lenguaje matemático con ayuda de símbolos, variables o incógnitas.

Ejemplo:
"Una viuda estaba obligada a repartirse con el hijo que debía nacer una herencia de 3500 monedas que le dejó su marido. Si nacía una niña, la madre de acuerdo con las leyes romanas, debería recibir el doble de la hija. Si nacía un niño, la madre recibía la mitad de la parte del hijo. Pero nacieron mellizos: un niño y una niña". ¿Cómo hay que dividir la herencia para cumplir con las condiciones impuestas por dicha ley?

Resolución:
Veamos el siguiente esquema:



Para solucionar el problema, luego de interpretar adecuadamente el texto hemos ido transformando las condiciones en una igualdad para generar una ecuación.

$$\begin{aligned} \text{niña} + \text{mamá} + \text{niño} &= 3500 \\ x + 2x + 4x &= 3500 \\ 7x &= 3500 \\ x &= 500 \end{aligned}$$

∴ El reparto debe efectuarse de la siguiente manera:

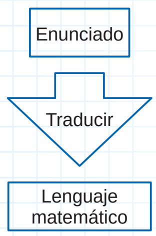
Niña: 500 monedas
Mamá: 1000 monedas
Niño: 2000 monedas

A continuación veamos la traducción de ciertos enunciados dados en forma verbal a su forma simbólica.

	Forma verbal	Forma simbólica
1	La suma de tres números consecutivos es 3000.	$x + x + 1 + x + 2 = 3000$
2	La edad de Ana es dos veces la edad de Betsy.	Ana = 2x; Betsy = x
3	La edad de Ana es dos veces más que la edad de Betsy.	Ana = 3x; Betsy = x
4	El quíntuple de un numero, aumentado en 30.	$5x + 30$
5	El quíntuple de un número aumentado en 30.	$5(x+30)$
6	El exceso de "A" sobre "B" es 50.	$A - B = 50$
7	Yo tengo la mitad de lo que tú tienes y él el triple de lo que tú tienes.	yo = x, tú = 2x; él = 6x
8	En una reunión hay tantos hombres como el triple del número de mujeres.	H = 3x M = x
9	He comprado tantas camisas como soles cuesta cada una.	Compro = x camisas Costo = S/. x
10	Gasté los 5/3 de lo que no gasté.	No gasté = x; gasté = $\frac{5}{3}x$

Nota

Plantear una ecuación es traducir un enunciado a un lenguaje matemático (ecuación).





Recuerda

Para el planteo de una ecuación es importante tener en cuenta "La coma".
Ejemplo:

- Los 2/3 de un número, disminuido en 7.
  $\frac{2}{3}N - 7$
- Los 2/3 de un número disminuido en 7.
  $\frac{2}{3}(N - 7)$



Importante

El exceso de un número respecto a otro, es la diferencia de dicho número respecto al otro.
Ejemplo:
El exceso de "A" respecto a "B" es 5, entonces:
$A - B = 5$

Problemas resueltos

1 3 cestos contienen 375 manzanas, el primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en el primer cesto?

Resolución:

Según los datos:
1.er cesto: $x + 15$
2.° cesto: $x + 5$
3.er cesto: x

Por condición del problema:

$$x + 15 + x + 5 + x = 575$$
$$3x + 20 = 575$$
$$3x = 555 \Rightarrow x = 185$$

Finalmente:
1.er cesto $= x + 15 = 185 + 15 = 200$

2 Reparte 850 entre M, N y P de modo que la parte de P sea 1/4 de M y la parte de M sea 1/3 de N. Indica lo que recibe M.

Resolución:

Del enunciado se tiene:

$$P = \frac{M}{4}$$

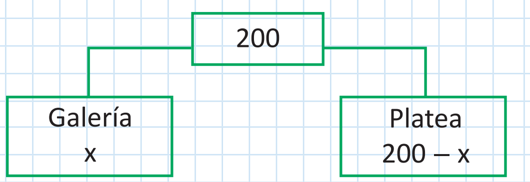
$$M = \frac{N}{3} \Rightarrow N = 3M$$

Por dato:
$$M + N + P = 850$$
$$M + 3M + \frac{M}{4} = 850$$
$$\frac{17M}{4} = 850$$
$$M = 200$$

$\therefore$ Lo que recibe M es 200.

3 Las entradas a un espectáculo cuestan S/.20 galería y S/.50 platea. Determina la diferencia entre los asistentes a galería y platea, si en total concurrieron 200 personas y se recaudó S/.8200.

Resolución:



Por condición del problema:

$$20x + 50(200 - x) = 8200$$
$$20x + 10\,000 - 50x = 8200$$
$$1800 = 30x \Rightarrow x = 60$$

Luego: $200 - x = 200 - 60 = 140$

Piden: $140 - 60 = 80$

4 En un corral entre patos, gallinas y conejos se contaron 58 cabezas y 148 patas. ¿Cuántos conejos hay?

Resolución:

Sean: n.° de patos: a
n.° de gallinas: b
n.° de conejos: c

Hay 58 cabezas, entonces:

$$a + b + c = 58$$
$$a + b = 58 - c$$

Hay 148 patas, entonces:

$$2a + 2b + 4c = 148$$
$$2(a + b) + 4c = 148$$
$$116 + 2c = 148$$
$$2c = 32 \Rightarrow c = 16$$

$\therefore$ Hay 16 conejos.

5 Si tuviera el doble de lo que no he perdido me compraría lo que cuesta el triple de lo que tengo, menos S/.300. ¿Cuánto tenía si perdí S/.200?

Resolución:

Del enunciado:
Tenía: x
Perdí: S/.200
Queda: $x - 200$
Por dato del problema:

$$2(x - 200) = 3(x - 200) - 300$$
$$300 = x - 200$$
$$x = 500$$

$\therefore$ Tenía S/.500.

6 Lo que gasta y ahorra diariamente una persona están en la relación de 6 a 7. Si diariamente gana S/.260, ¿en cuánto tiene que disminuir su gasto diario para que la relación sea de 2 a 3?

Resolución:

Sean: Gasta: a
Ahorra: b
Sueldo: S/.260

Dato: $\frac{a}{b} = \frac{6k}{7k}$

Por condición del problema:

$$a + b = 260$$
$$6k + 7k = 260$$
$$13k = 260 \Rightarrow k = 20$$

Sea "x" lo que debe disminuir.

Luego: $\frac{a - x}{b + x} = \frac{2}{3}$

$$\frac{120 - x}{140 + x} = \frac{2}{3}$$
$$360 - 3x = 280 + 2x$$
$$80 = 5x \Rightarrow x = 16$$

$\therefore$ Debe disminuir S/.16.

7 Juan le dice a Pedro: "préstame S/.30 para tener la misma cantidad de dinero". Pedro le responde: "Mejor págame los S/.10 que me debes y así tendré el triple de lo que te queda". ¿Cuánto dinero tienen entre los dos?

Resolución:

Hacemos un esquema:

		Presta S/.30	Paga S/.10
Juan	x	x + 30	x − 10
Pedro	x + 60	x + 30	x + 70

Luego:

$$x + 70 = 3(x - 10)$$
$$x + 70 = 3x - 30$$
$$100 = 2x \Rightarrow x = 50$$
$$x + 60 = 50 + 60 = 110$$

$\therefore$ Entre los dos tienen S/.160.

8 Ana y Beatriz dedican 760 dólares cada una para socorrer a cierto número de pobres, Beatriz socorre a 150 pobres más que Ana, pero esta da a cada pobre 15 dólares más que Beatriz. ¿Cuántos pobres son socorridos por Beatriz?

Resolución:

Hacemos un esquema:

	Gasto total	Número de personas	Gasto por persona
Ana	760	x	760/x
Beatriz	760	x + 150	760/(x + 150)

Por condición del problema:

$$\frac{760}{x} - \frac{760}{x + 150} = 15$$
$$760x + 760 \,.\, 150 - 760x = 15x(x + 150)$$
$$760 \,.\, 10 = x(x + 150)$$
$$40 \,.\, 190 = x(x + 150)$$
$$x = 40$$

$\therefore$ n.° de pobres socorridos por Beatriz es 190.

9 Se tienen 3 montones de clavos donde las cantidades son proporcionales a 6; 7 y 11. Si del montón que tiene más clavos se sacan 12 para redistribuir entre los demás, al final se tendrían los tres montones con igual número de clavos. ¿Cuántos clavos hay en total?

Resolución:

Según los datos:

	1.er montón	2.° montón	3.er montón
Al inicio	6k	7k	11k
Se retiran 12 del 3.°			12
Queda	6k + x	7k + 12 − x	11k − 12
	I	II	III

Por condición del problema:

(I) = (II): $6k + x = 7k + 12 - x$
$2x = k + 12$ ... (1)

(I) = (III): $6k + x = 11k - 12$
$x = 5k - 12$ ... (2)

De (1) y (2): $k = 4$

$\therefore$ n.° total de clavos es:

$$6k + 7k + 11k = 24k$$
$$= 24(4) = 96$$

Actividades de razonamiento

1. El cociente de dos números es 7 y su residuo es 8. Determina la diferencia de dichos números si suman 136.

A) 115 B) 120 C) 90
D) 104 E) 100

2. Lourdes compró una muñeca, un vestido y un par de zapatos por 400 soles. Los zapatos costaron 30 soles más que el vestido y la muñeca 20 menos que el vestido. Calcula el precio del vestido.

A) 100 soles B) 110 soles C) 130 soles
D) 150 soles E) 120 soles

3. El numerador de una fracción excede al denominador en 1 y si al denominador se le agrega 10 unidades, el valor de la fracción sería 1/2. Encuentra dicha fracción.

A) 9/8 B) 5/3 C) 3/2
D) 7/5 E) 1/4

4. En un salón de 164 alumnos se observa que la séptima parte de las mujeres son 14 y la onceava parte de los hombres no son responsables. ¿Cuántos hombres son responsables?

A) 98 B) 60 C) 40
D) 66 E) 100

5. La edad de Ramona es el doble de la de Juana, y hace 15 años, la edad de Ramona era el triple de la edad de Juana. ¿Cuál es la edad actual de Ramona?

A) 25 años B) 15 años C) 45 años
D) 30 años E) 60 años

6. El papá de Juan acude al hipódromo con S/.4300 y cuando ya ha perdido S/.700 más de lo que no ha perdido, apuesta lo que le queda y lo triplica. ¿Ganó o perdió? ¿Cuánto?

A) S/.1100 B) S/.1200 C) S/.4000
D) S/.1800 E) S/.1000

7. ¿En cuánto aumenta un número de 2 cifras al invertir sus cifras, si la diferencia entre dichas cifras es 5?

A) 15 B) 30 C) 45
D) 20 E) 40

8. En una reunión el número de hombres es al de las mujeres como 4 es a 5. Si se retiran 8 parejas de esposos la nueva relación es de 2 a 3. ¿Cuántos invitados asistieron?

A) 30 B) 20 C) 10
D) 36 E) 25

9. Al cine asistieron 399 personas entre hombres, mujeres y niños. Si el número de hombres es el quíntuple que el de mujeres y el número de mujeres es el triple que el de niños. ¿Cuántos hombres hay?

A) 315 B) 220 C) 135 D) 399 E) 200

10. Daniel tiene 5 veces más que José. Si Daniel pierde S/.50 y José gana S/.30, entonces José tendría 3 veces más de lo que queda a Daniel. ¿Cuánto tiene José?

A) S/.15 B) S/.60 C) S/.10
D) S/.30 E) S/.40

11. De los S/.80 que tenía, si no hubiera comprado un chocolate que me costó S/.10, tan solo hubiera gastado los 3/5 de lo que no hubiera gastado. ¿Cuánto gasté?

A) S/.25 B) S/.20 C) S/.30
D) S/.10 E) S/.40

12. El número de patos excede en 8 al número de gallinas. Si se agregan 17 patos y se retiran 7 gallinas, entonces la relación de gallinas a patos es de 1 a 5. ¿Cuántos patos había al inicio?

A) 20 B) 23 C) 18
D) 15 E) 13

13. Una suma de S/.120 se reparte en partes iguales entre cierto número de personas. Si el número de persona hubiera sido 1/5 más de las que había; cada persona hubiera recibido S/.2 menos. ¿Entre cuántas personas se repartió el dinero?

A) S/.30 B) S/.15 C) S/.10
D) S/.40 E) S/.20

14. Varios gorriones se posan en unos postres. Si sobre cada poste hay un solo gorrión, quedan 3 gorriones volando; y si sobre cada poste hay 3 gorriones quedan 3 postes libres. ¿Cuántos postes hay?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

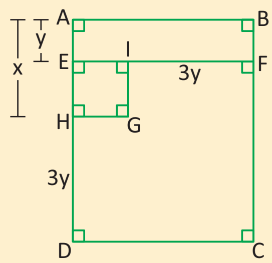
Claves

1. D 2. C 3. A 4. B
5. E 6. A 7. C 8. D
9. A 10. C 11. E 12. B
13. C 14. A

Reto



En la figura, el área del cuadrado EHGI es 49 cm^2 y del hexágono HGIFCD es 576 cm^2. Halla el valor de "x".



Rpta.: 13 m

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Al preguntar un padre a su hijo cuánto gastó de los S/.350 que le dio, este le contesta: "Las tres cuartas partes de lo que no gasté". ¿Cuánto le queda?

   A) S/.250 B) S/.300 C) S/.400
   D) S/.200 E) S/.150

2. La diferencia de los cuadrados de dos números impares consecutivos es 424. Halla el mayor de ellos.

   A) 105 B) 106 C) 110 D) 104 E) 107

3. El producto de dos números enteros positivos consecutivos se resta la suma de los mismos y se obtiene 71. El número mayor es:

   UNMSM-2005 I

   A) 11 B) 10 C) 12 D) 8 E) 9

4. En una granja se cuentan 92 patas y 31 cabezas. Si solo hay patos y conejos, ¿cuál es la diferencia entre el número de estos animales?

   A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. Un lapicero cuesta 8 soles y un lápiz 5 soles. Se quiere gastar exactamente 96 soles, de manera de que se puede adquirir la mayor cantidad posible de lapiceros y lápices. ¿Cuál es este número máximo?

   A) 11 B) 13 C) 15 D) 18 E) 17

6. Con 12 monedas en total, unas de 50 céntimos y otras de 20 céntimos, se quiere pagar una deuda de S/.3,60. ¿Cuántas monedas de cada clase se utilizarán?

   A) 3 y 9 B) 4 y 8 C) 5 y 7
   D) 10 y 2 E) 1 y 11

7. 

   La edad de un padre sobrepasa en 5 años a la suma de las edades de sus 3 hijos. Dentro de 10 años, él tendrá el doble de la edad de su hijo mayor; dentro de 20 años, tendrá el doble de la edad del segundo, y dentro de 30 años, tendrá el doble de la edad del tercero. Calcula la edad del padre.

   A) 60 B) 70 C) 65 D) 50 E) 40

8. Un alumno nació en el año $\overline{19ab}$ y en 1980 tuvo $(a + b)$ años. ¿En qué año cumplió $(2a + b)$ años?

   A) 1986 B) 1988 C) 1980
   D) 1990 E) 1982

9. Sobre un estante se pueden colocar 24 libros de RM y 20 libros de RV o 36 libros de RM y 15 libros de RV. ¿Cuántos libros únicamente de RM entrarían en el estante?

   A) 65 B) 70 C) 78 D) 72 E) 76

(10) En un examen, un alumno gana dos puntos por cada respuesta correcta, pero pierde un punto por cada incorrecta, después de haber contestado 40 preguntas obtiene 56 puntos. ¿Cuántas preguntas correctas contestó?

A) 32 B) 28 C) 36 D) 24 E) 38

NIVEL 2

(11) Si a la clase de física asisten "z" alumnos, y se sabe que hay 20 mujeres más que varones, ¿cuántos varones hay en el aula? **UNI-2007 I**

A) $\frac{z-5}{3}$ B) $\frac{2z-3}{2}$ C) $\frac{z}{2}+5$

D) $\frac{z}{2}-10$ E) $\frac{z}{3}+6$

(12) El perímetro de un rectángulo mide 44 m. Si la base de este rectángulo tuviese 3 m más y su altura 4 m menos, el área del nuevo rectángulo tendría 30 m^2 menos que el del primero. Halla la base.

A) 12 m B) 14 m C) 18 m
D) 13 m E) 16 m

(13) ¿Cuál es la diferencia entre el área de un cuadrado y un rectángulo de igual perímetro, si en el rectángulo la base es el doble de la altura? **UNMSM-2004 II**

A) 5/3 del área del cuadrado.
B) 5/9 del área del cuadrado.
C) 13/9 del área del cuadrado.
D) 1/9 del área del cuadrado.
E) 1/3 del área del cuadrado.

(14) Indica cuánto aumenta el área de un rectángulo de perímetro 2p cuando cada uno de sus lados aumenta en x.

A) x^2+px B) x^2-px C) $(x+p)^2$
D) x^2-p^2 E) $x^2-2px+p^2$

(15) Una persona tiene una tina cuya capacidad es 490 litros. Para que la tina esté llena, cuando la persona esté dentro, es preciso echar 24 baldes con agua. Si la persona tuviese el doble de volumen, se echaría 4 baldes menos. ¿Cuál es el volumen de la persona y cuál es el volumen del balde en litros?

A) 70; 18 B) 74; 18,5 C) 70; 17,5
D) 72; 18 E) 70; 16

(16) A un comerciante por cada 7 cuadernos que compra le regalan 3 y cuando los pone a la venta, por cada 2 docenas que vende, regala 1. ¿Cuántos cuadernos deberá comprar para que pueda vender 960?



A) 600 B) 640 C) 650 D) 660 E) 700

(17) La suma de las dos cifras que componen un número es igual a 11. Si se invierte el orden de las cifras de dicho número y se le suma 103, entonces se obtiene el triple del número original. Halla el número original aumentado en 11.

A) 121 B) 78 C) 69 D) 64 E) 67

18) Un comerciante compra cuadernos a 3 por 10 soles y los vende a 5 por 20 soles.

I. Para ganar 100 soles, ¿cuántos cuadernos debe vender?

II. Si aún le quedan por vender 30 cuadernos que representan su ganancia, ¿cuántos cuadernos compró?

A) 150-100 B) 180-150 C) 150-180
D) 130-180 E) 200-130

19) Un comerciante compró 40 jarrones a 7 dólares cada uno, después de haber vendido 12 con una ganancia de 2 dólares por jarrón, se le rompieron. ¿A qué precio vendió cada uno de los jarrones que le quedaron, sabiendo que la ganancia total fue de 81 dólares?

A) $11 B) $12 C) $13 D) $10 E) $14

20) A un taetro asistieron 425 personas entre hombres (adultos), mujeres (adultas) y niños. Si el número de hombres (adultos) es el triple del número de mujeres (adultas) y el de mujeres (adultas) es el cuádruple del número de niños, ¿cuántos hombres hay en el teatro?



A) 380 B) 325 C) 300 D) 315 E) 350

NIVEL 3

21) La suma de dos números es S, si se añade N al menor y se le quita N al mayor, su relación geométrica se invierte. Halla el menor.

A) $\frac{S-N}{2}$ B) $\frac{S+N}{2}$ C) $S+N$
D) $S-N$ E) $2(S-N)$

22) Siete niños deben pagar equitativamente una deuda de 68 soles, pero algunos no tienen dinero y los otros pagan 17 soles cada uno, cancelando así la deuda. ¿Cuántos son los niños que no pagan?

UNI-2004 II

A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 1

23) Si escribo a la derecha de un número las cifras x; y; este número aumenta en a unidades. ¿Cuál es ese número?

A) $a-10x-y$ B) $\frac{a+10x+y}{99}$
C) $\frac{a-10x-y}{11}$ D) $\frac{a-10x-y}{99}$
E) $a+10x-y$

24) A una fiesta asisten 200 personas, la mitad hombres y la mitad mujeres; cincuenta hombres son mayores de edad, hay tantas personas mayores de edad como mujeres menores de edad. ¿Cuántas mujeres son menores de edad y cuántas mayores de edad?

A) 35 y 65 B) 40 y 60 C) 20 y 80
D) 90 y 10 E) 25 y 75

25) A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es de 30 m, y de la otra 20 m. La distancia entre sus troncos, 50 m. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito

los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

A) 25 m B) 20 m C) 15 m D) 24 m E) 18 m

26. Una chica va todos los días al trabajo en bicicleta por un camino paralelo a la vía del tren. Lleva una velocidad de 6 km/h y todos los días coincide en un cruce con un tren que lleva su mismo sentido. Cierto día se durmió y se retrasó 50 minutos con lo que el tren la alcanzó a 6 km del citado cruce. Calcula el tiempo que tarda el tren en llegar a ese cruce después de sobrepasar a la ciclista.



A) 10 min B) 15 min C) 22 min
D) 30 min E) 50 min

27. Tres personas A, B y C están jugando a las cartas con la siguiente condición: la que pierda en primer lugar duplicará el dinero de las otras, la que pierda en segundo lugar duplicará el dinero de las otras y además les dará 10 soles, y la que pierda en tercer lugar duplicará el dinero de las otras, pero les quitará 20 soles. Si cada una ha perdido una partida en el orden indicado por sus nombres y se ha quedado cada una con 60 soles. Calcula lo que tenía B inicialmente.

A) 50 soles B) 40 soles C) 60 soles
D) 55 soles E) 75 soles

28. En el mes de marzo del año 2008, en un aula de 30 alumnos se sumó las edades de todos y luego se sumó los años de nacimiento de todos, se sumaron los resultados obtenidos en cada caso y el resultado final fue un número en el cual, las 2 últimas cifras son significativas y forman un cuadrado perfecto. ¿Cuántos alumnos ya habían cumplido años hasta ese momento?

A) 4 B) 16 C) 14 D) 26 E) 10

29. En una familia la suma de las edades de los padres es 3 veces la suma de las edades de sus hijos. Hace 3 años la suma de las edades de los padres era 9 veces la de sus hijos y dentro de 17 años la suma de las edades de los padres y la suma de las edades de los hijos serán iguales. ¿Cuántos hijos tiene la familia?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

30. María, cada día gasta la mitad de lo que tiene más S/. 2. Si después de 3 días le quedan S/. 30, ¿cuánto tenía al inicio?

A) S/.260 B) S/.268 C) S/.270
D) S/.275 E) S/.278

Claves

NIVEL 1	9. D	17. E	25. B
1. D	10. A	18. C	26. A
2. E	**NIVEL 2**	19. A	27. C
3. B	11. D	20. C	28. D
4. A	12. A	**NIVEL 3**	29. B
5. D	13. D	21. A	30. B
6. B	14. A	22. A	
7. D	15. C	23. D	
8. A	16. E	24. E	

Edades

CASOS

En los problemas sobre edades se presentan 2 casos:

Cuando interviene la edad de una persona

Ejemplo:
Cuatro veces la edad que tendré dentro de 10 años, menos 3 veces la edad que tenía hace 5 años, resulta el doble de mi edad actual. ¿Cuántos años me faltan para cumplir 60 años?

Resolución:
Sea "x" la edad actual.

Hace 5 años — Dentro de 10 años

$x - 5$	x	$x + 10$
Pasado	Presente	Futuro

Por condición del problema: $4(x + 10) - 3(x - 5) = 2x$

$$4x + 40 - 3x + 15 = 2x$$

$$x = 55 \text{ (Edad actual)}$$

$\therefore$ Para cumplir 60 años me faltan: $60 - 55 = 5$ años

Cuando intervienen las edades de dos o más personas

Ejemplo:
Yo tengo el doble de tu edad. Si mi edad dentro de 5 años es el triple de la edad que tú tenías hace 7 años. ¿Qué edad tengo?

Resolución:
En el gráfico sea "x" la edad que tú tienes.

	Hace 7 años	Edad actual	Dentro de 5 años
Yo		$2x$	$2x + 5$
Tú	$x - 7$	x	

Según el enunciado: $2x + 5 = 3(x - 7)$

$$2x + 5 = 3x - 21$$

$$x = 26$$

$\therefore$ Yo tengo: $2(26) = 52$ años

Observación
Asumiendo que las edades de 3 personas en el pasado, presente y futuro sean:

	Pasado	Presente	Futuro
Yo	10	18	30
Tú	14	22	34
Él	20	28	40

La diferencia de edades de dos personas permanece constante en el tiempo.



Observación

Sea "x" mi edad actual, entonces dentro de "m" años tendré "x + m" años, y hace "n" años tenía "x – n" años.

Hace "n" años — Dentro de "m" años

$x - n$	x	$x + m$
Pasado	Presente	Futuro

Nota

Para toda persona, se cumple que la relación de su edad actual, su año de nacimiento y el año actual es la siguiente:

1. Cuando una persona ya cumplió años:

$$\text{AÑO NAC.} + \text{EDAD ACTUAL} = \text{AÑO ACTUAL}$$

2. Cuando una persona aun no cumple años:

$$\text{AÑO NAC.} + \text{EDAD ACTUAL} = \text{AÑO ACTUAL} - 1$$



Recuerda

Existen problemas donde no se menciona cuántos años antes o cuántos años después va a ocurrir una determinada condición, solo se limita a decir que ocurrirá en el pasado o en el futuro.

Problemas resueltos

1 ¿Cuántos años tiene una persona sabiendo que la raíz cuadrada de la edad que tenía hace 3 años más la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 6 años suman 9 años?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 3 años	Edad actual	Dentro de 6 años
Persona	x – 3	x	x + 6

Según el enunciado:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+6} = 9$$
$$\sqrt{x+6} = 9 - \sqrt{x-3}$$
$$\left(\sqrt{x+6}\right)^2 = \left(9 - \sqrt{x-3}\right)^2$$
$$x + 6 = 81 - 18\sqrt{x-3} + x - 3$$
$$18\sqrt{x-3} = 72$$
$$\sqrt{x-3} = 4$$
$$x - 3 = 16$$
$$x = 19$$

∴ La persona tiene 19 años.

2 Cuando transcurran (m + n) años a partir de hoy, tendré el doble de la edad que tenía hace (m – n) años. ¿Cuántos años tendré dentro de "n" años?

Resolución:

Según los datos:

Hace (m– n) años	Edad actual	Dentro de "n" años	Dentro de (m + n) años
x – (m – n)	x	x + n	x + (m + n)

Según el enunciado:

$$x + (m + n) = 2(x - (m - n))$$
$$x + m + n = 2x - 2m + 2n$$
$$x = 3m - n$$

∴ Dentro de "n" años tendré "3m" años.

5 Dentro de 20 años, la edad de Evelyn será a la edad de Irma como 4 es a 3. ¿Cuál es la edad de Evelyn si hace 13 años su edad era el quíntuple de la edad de Irma?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 13 años	Edad actual	Dentro de 20 años
Evelyn	4k – 33	4k – 20	4k
Irma	3k – 33	3k – 20	3k

Por dato del problema:

$$4k - 33 = 5(3k - 33)$$
$$4k - 33 = 15k - 5 . 33$$
$$4 \cdot 33 = 11k$$
$$k = 12$$

∴ La edad de Evelyn es: 4(12) – 20 = 28 años

6 Lucía le dice a Jesús: "Yo tengo el triple de la edad que tú tenías, cuando yo tenía la edad que tienes y cuando tengas la edad que tengo, nuestras edades sumarán 35 años". ¿Qué edad tiene Jesús?

Resolución:

Según los datos:

	Tenías	Tengo / Tienes	Tengas
Lucía	y	3x	35 – 3x
Jesús	x	y	3x

(Tengas: Suman 35)

Aplicando suma en aspa: $2y = 4x$
$y = 2x$

También:
$$6x = y + 35 - 3x$$
$$6x = 2x + 35 - 3x$$
$$7x = 35 \Rightarrow x = 5 \wedge y = 10$$

∴ Jesús tiene 10 años.

7 Cuando yo tenía un año menos de la edad que tienes, tú tenías 5 años menos de la edad que yo tengo, pero cuando tengas la edad que yo tengo, nuestras edades sumarán 110 años. ¿Qué edad tengo?

Resolución:

Según los datos:

	Tenía / Tenías	Tengo / Tienes	Tengas
Yo	x – 1	y	110 – y
Tú	y – 5	x	y

(Tengas: Suman 110)

Aplicando suma en aspa: $2x - 1 = 2y - 5$
$$2x + 4 = 2y$$
$$x + 2 = y$$

También: $2y = x + 110 - y$
$2y = y - 2 + 110 - y$
$2y = 108 \Rightarrow y = 54$

$\therefore$ Yo tengo 54 años.

8 Alejandro nació en $\overline{19ab}$ y en $\overline{19ba}$ cumplió "5a + 3b" años. ¿En qué año cumplió "a + 2b + 1" años?

Resolución:

Sabemos que:
Edad = Año actual – Año de nacimiento

En el problema:

$$5a + 3b = \overline{19ba} - \overline{19ab}$$
$$5a + 3b = 1900 + 10b + a - (1900 + 10a + b)$$
$$5a + 3b = 9b - 9a$$
$$14a = 6b$$
$$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$$

Luego: $a = 3$ y $b = 7$

Entonces Alejandro nació en $\overline{19ab} = 1937$.

Además: $a + 2b + 1 = 3 + 2(7) + 1 = 18$ años

$\therefore$ Cumplió 18 años en: $1937 + 18 = 1955$

9 La edad de un abuelo es un número de 2 cifras, la edad de su hijo es un número que tiene los mismos dígitos pero en orden invertido, y las edades de sus nietos coinciden con cada una de las cifras de su edad. Si se sabe además, que la edad del hijo es a la edad del nieto mayor como 5 es a 1, halla la suma de las cifras de la edad de la esposa del hijo, sabiendo que dicha edad es la mitad de la edad del abuelo.

Resolución:

Según los datos:

$\overline{ab}$: edad del abuelo   a: edad del nieto mayor
$\overline{ba}$: edad del hijo   b: edad del nieto menor

Según el enunciado: $\frac{\overline{ba}}{a} = \frac{5}{1}$

$$10b + a = 5a$$
$$10b = 4a$$
$$\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$$

Entonces: $a = 5$ y $b = 2$

Luego, la edad de la esposa del hijo es:

$$\frac{\text{Edad del abuelo}}{2} = \frac{\overline{ab}}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

$\therefore$ Suma de cifras: $2 + 6 = 8$

10 La suma de las edades de una pareja de esposos, cuando nació su primer hijo era la mitad de la suma de sus edades actuales. Si ahora el hijo tiene 20 años, ¿qué edad tenía cuando las edades de los 3 sumaban 70 años?

Resolución:

Según los datos:

	Hace 20 años	Edades actuales
Padre	A – 20	A
Madre	B – 20	B
Hijo	0	20

Según el enunciado:

$$(A - 20) + (B - 20) = \frac{A + B}{2}$$
$$2A + 2B - 80 = A + B$$
$$A + B = 80$$

Luego, hace "x" años las edades de los 3 sumaban 70 años.

	Hace "x" años	Edades actuales
Padre	A – x	A
Madre	B – x	B
Hijo	20 – x	20

Según la condición del problema:

$$(A - x) + (B - x) + (20 - x) = 70$$
$$\underbrace{A + B}_{80} - 3x = 50$$
$$80 - 3x = 50$$
$$30 = 3x$$

$\Rightarrow x = 10$

$\therefore$ El hijo tenía 10 años.

Actividades de razonamiento

1. Norma le dice a Marisol: “Tengo el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la mitad de la edad que tienes, y cuando tengas la edad que tengo yo, tendré el doble de la edad que tú tenías hace 12 años”. ¿Cuánto suman sus edades actuales?

A) 65 años B) 55 años C) 68 años
D) 50 años E) 60 años

2. Cuando yo tenía lo que te falta actualmente para tener el doble de mi edad, tú tenías la mitad de la edad que yo tendré cuando tú tengas lo que me falta actualmente para tener 70 años. Si la suma de nuestras edades actuales es 50 años, calcula la diferencia de nuestras edades dentro de 40 años.

A) 10 años B) 20 años C) 16 años
D) 8 años E) 12 años

3. Preguntando a una persona por su edad, esta responde: “Si al doble de mi edad le quitan 17 años, se obtendrá su complemento aritmético”. Calcula la edad de la persona.

A) 9 años B) 39 años C) 18 años
D) 9 o 39 años E) 27 años

4. La edad que tenía hace n años es a lo que tendré dentro de n años como 2 es a 9. ¿Qué edad tendré dentro de $\frac{3n}{7}$ años?

A) $\frac{n}{2}$ años B) 2n años C) n años
D) $\frac{n}{3}$ años E) 3n años

5. Dentro de 8 años la suma de nuestras edades será 46 años, pero hace n años la diferencia de nuestras edades era 4 años. ¿Hace cuántos años la edad de uno era el triple de la edad del otro?

A) 11 años B) 12 años C) 13 años
D) 15 años E) 14 años

6. A le dice a B: “Cuando yo tenía tú edad, C tenía 10 años”; B contesta: “Cuando yo tenga tu edad, C tendrá 26 años”; C interviene diciendo: “Si sumamos los años que ustedes me llevan de ventaja resultaría el doble de mi edad”. ¿Cuál es la edad del menor?

A) 20 años B) 12 años C) 15 años
D) 16 años E) 18 años

7. En 1990, la edad de Paola era 4 veces la edad de Vicky y en 1998 la edad de Paola fue el doble de la edad de Vicky. Halla la edad actual de Vicky si ya cumplió años (año actual: 2004).

A) 20 años B) 22 años C) 18 años
D) 15 años E) 13 años

8. Dentro de 8 años la edad de Pedro será la que Juan tiene ahora. Dentro de 15 años Pedro tendrá 4/5 de la edad que entonces tendrá Juan. ¿Cuál era la suma de las edades de Juan y Pedro, cuando Juan tenía el doble de la edad de Pedro?

A) 24 años B) 20 años C) 17 años
D) 16 años E) 19 años

9. En 1920 la edad de Elena era cuatro veces la edad de Mónica; en 1928 la edad de Elena fue el doble de la edad de Mónica. ¿Cuál fue la edad de Elena en 1930?

A) 18 años B) 26 años C) 15 años
D) 14 años E) 20 años

10. Hace 2 años la edad de Renato era (a + b – c) años y dentro de 5 años tendrá (2b – 2c + a) años. Halla el valor (en años) de: 3b – 3c

A) 18 años B) 13 años C) 19 años
D) 21 años E) 15 años

11. Las edades de Elena y Carla suman 55 años. Si cuando Carla nació Elena tenía la sexta parte de la edad que tiene ahora, ¿cuántos años tiene Carla?

A) 13 años B) 18 años C) 20 años
D) 17 años E) 25 años

12. Katy tuvo su primer hijo a los 25 años, su segundo hijo a los 30 años y 3 años después a su tercer hijo. Si actualmente (2013) la suma de todas las edades es 92. ¿En qué año nació Katy?

A) 1965 B) 1975 C) 1970
D) 1968 E) 1978

13. Karol tuvo mellizos a los "b" años. Si hoy las 3 edades suman "a" años. ¿Cuántos años tiene cada mellizo?

A) $\frac{(a-b)}{2}$ B) $\frac{(a-b)}{3}$ C) a – b

D) $\frac{(a+b)}{3}$ E) $\frac{(a+b)}{2}$

14. Hace "m – a" años la edad de "A" era "m" veces la edad de "B". Dentro de "m + a" años la edad de A será "a" veces la edad de "B", en consecuencia, la edad que tenía "B" hace "m – a" años era igual a:

A) $\frac{2m(a-1)}{(m-a)}$ B) $\frac{m(a-1)}{(m-a)}$ C) $\frac{ma}{(m-a)}$

D) $\frac{(ma+1)}{(m-a)}$ E) $\frac{2ma}{(m-a)}$

Claves

1. C 2. A 3. D 4. B
5. A 6. E 7. C 8. A
9. B 10. D 11. E 12. D
13. B 14. A

Reto



Hace "n" años la relación de las edades de dos personas era de 6 a 5. Si la diferencia de los cuadrados de sus edades es 111. ¿Cuál será la relación de sus edades dentro de "2n" años?

Rpta.: $\frac{8}{7}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Si tuviera 15 años más, entonces lo que me faltaría para cumplir 78 años sería los cinco tercios de la edad que tuve hace 7 años. ¿Qué edad tendré dentro de 5 años?

   A) 38 años B) 34 años C) 35 años
   D) 32 años E) 33 años

2. Si al año en que cumplí los 18 años le suman el año en que cumplí los 24 y le restan el año en que nací y el año actual, se obtiene 12. ¿Cuál es mi edad?

   A) 33 años B) 25 años C) 30 años
   D) 27 años E) 40 años

3. Dentro de 10 años tendré el doble de la edad que tuve. Si tendría lo que tuve, tengo y tendré, mi edad sería el triple de la edad que tengo. ¿Qué edad tuve hace 5 años?

   A) 30 años B) 40 años C) 32 años
   D) 25 años E) 28 años

4. En la actualidad tengo 18 años, ¿hace cuántos años tuve la mitad de la edad que tendré dentro de 12 años?

   A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

5. Dentro de 14 años, Lucy tendrá el doble de la edad que tenía hace 8 años. Halla la edad que tenía Lucy el año pasado.

   A) 43 años B) 29 años C) 30 años
   D) 31 años E) 44 años

6. Si al triple de la edad que tendré dentro de 4 años le sumo el cuádruple de la edad que tenía hace 9 años, resultará el séxtuple de mi edad actual. ¿Qué edad tengo?

   A) 20 años B) 17 años C) 24 años
   D) 15 años E) 27 años

7. Hoy nació mi hijo y mi edad es el triple de la que tuve en un determinado pasado. Cuando mi hijo cumpla 18 años, yo tendré 48 años. ¿Cuántos años tuve en el pasado mencionado?

   A) 30 B) 29 C) 18 D) 10 E) 25

8. Si 3 veces la edad de mi hija equivale a 2 veces la edad de mi hijo; y hace 3 años, 3 veces la edad de mi hija era equivalente a la edad de mi hijo en ese entonces. ¿Cuántos años tiene mi hijo?

   A) 10 B) 8 C) 4 D) 6 E) 5

9. Mariana le dice a Carlos: "Mi edad es 4 años menos de la edad que tenías cuando yo tenía 8 años menos de la edad que tú tienes, y cuando tú tengas el doble de la edad que tengo, nuestras edades sumarán 82 años". ¿Qué edad tiene Mariana?

   A) 20 años B) 13 años C) 22 años
   D) 16 años E) 18 años

A) 22 años B) 24 años C) 25 años
D) 26 años E) 28 años

10. Cuando yo tenía 1 año menos de la edad que tú tienes, tú tenías 5 años menos de la edad que yo tengo; pero cuando tengas mi edad, nuestras edades sumarán 52 años. ¿Qué edad tiene mi esposa, si nació 5 años antes que yo?

A) 24 años B) 30 años C) 32 años
D) 20 años E) 16 años

NIVEL 2

11. La suma de las edades de dos hermanos es 30 años. Si dentro de 10 años la edad de uno será el doble de la edad que tuvo el otro hace 10 años, ¿cuál es la edad de cada hermano? (Da como respuesta el producto de dichas edades).

A) 180 B) 250 C) 200 D) 360 E) 144

12. La suma de las edades de Vanessa y Rony es 52 años. Al acercarse Fiorella, Vanessa le comenta: “Cuando tú naciste, yo tenía 8 años; pero cuando Rony nació, tenías 4 años”. ¿Cuál es la edad de Fiorella?

A) 21 años B) 23 años C) 24 años
D) 20 años E) 32 años

13. En 1990, la edad de Milagros era 4 veces la edad de Vilma y en 1998 la edad de Milagros fue el doble de la edad de Vilma. Halla la edad actual de Vilma si ya cumplió años. (Año actual: 2014)

14. Hace 10 años la edad de un padre era el doble de la edad de su hijo, pero dentro de 20 años la relación de sus edades será de 4 a 3. Halla la edad actual del hijo.

A) 25 años B) 40 años C) 30 años
D) 18 años E) 34 años

15. Jorge le dice a Luis: “La suma de nuestras edades es 46 años y tu edad es el triple de la edad que tenías cuando yo tenía el triple de la edad que tuviste cuando yo nací”. Entonces Luis tiene:

A) 12 años B) 34 años C) 48 años
D) 24 años E) 16 años

16. Los años que tendrás dentro de 12 años son a los que ahora tengo como 7 es a 5. Si actualmente mi edad excede a tu edad en 4 años, ¿cuál es la diferencia entre el doble de tu edad con mi edad?

A) 12 años B) 9 años C) 13 años
D) 17 años E) 20 años

17. Hace 5 años nuestras edades estaban en la relación de 5 a 3, y dentro de 25 años, tu edad será a la mía como 5 es a 7. ¿Cuántos años tengo?

A) 40 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

(18) La edad que tú tienes es la edad que yo tenía cuando él tenía la octava parte de lo que tendré cuando tú tengas lo que yo tengo y él tenga 6 años más de lo que yo tuve que es 6 años más de lo que él tiene y 12 años más de lo que tuviste en ese entonces. ¿Qué edad tengo?

A) 36 años B) 38 años C) 40 años
D) 37 años E) 42 años

(19) En 1990, la edad de Alex era cuatro veces la edad de Beto y en 1998 la edad de Alex fue el doble de la edad de Beto. Halla la edad que Beto tendrá en el 2005.

A) 16 años B) 17 años C) 18 años
D) 19 años E) 20 años

(20) Un padre tiene **x** años y su hijo **y** años. ¿Dentro de cuántos años tendrá el padre el cuádruple de la edad de su hijo?

A) $\frac{4y-x}{3}$ B) $\frac{4x-y}{3}$ C) $\frac{x-4y}{3}$

D) $\frac{x-3y}{2}$ E) $\frac{3y-x}{2}$

NIVEL 3

(21) Una ciudad fue fundada en el siglo XX. En el mismo año que se escribe con las mismas cifras del año de su fundación, pero con las 2 últimas cifras invertidas, se celebraron tantos años como cinco veces la suma de las 2 últimas cifras del año de su fundación. ¿Cuántos años se celebraron en aquella fecha?

A) 9 años B) 45 años C) 35 años
D) 10 años E) 50 años

(22) A la edad de mi sobrino (**a** años) la multiplico por 2, a dicha cantidad le sumo 5; al resultado lo multiplico por 50 y luego le quito 365. A esa cantidad le agrego tanto como el resultado obtenido; para finalmente sumarle a todo 115 y obtener $\overline{ab5}$. ¿Qué edad tiene mi sobrino?

A) 2 años B) 5 años C) 8 años
D) 7 años E) 4 años

(23) Dentro de 8 años la edad de Romel será la que Luis tiene. Si dentro de 15 años Romel tendrá 4/5 de la edad que entonces tendrá Luis, ¿cuál era la suma de las edades de Luis y Romel, cuando Luis tenía el doble de la edad de Romel?

A) 26 años B) 24 años C) 28 años
D) 30 años E) 18 años

(24) ¿Cuántos años tiene una persona sabiendo que la raíz cuadrada de la edad que tenía hace 4 años sumada con la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 8 años resulta 6?

A) 8 B) 7 C) 5 D) 10 E) 11

25. Las edades de un padre y su hijo son las mismas, pero con los dígitos al revés. Si hace un año la edad del padre era el doble de la edad de su hijo, la diferencia de las edades es:

A) 45 años B) 72 años C) 27 años
D) 63 años E) 36 años

26. Eva nació en el año $\overline{19ab}$ y en 1980 tuvo (a + b) años. Halla su edad en el 2005.

A) 38 años B) 32 años C) 28 años
D) 40 años E) 39 años

27. Sebastián suma 1 año, más 2 años, más 3 años y así sucesivamente hasta su edad actual obteniendo como resultado un número de 3 cifras iguales. ¿Qué edad tiene Sebastián?

A) 26 años B) 12 años C) 44 años
D) 16 años E) 36 años

28. Halla la edad de cierta persona, sabiendo que la suma de los años que tiene más su edad en meses es igual a 470.

UNMSM-2011 II

A) 38 años y 9 meses.
B) 34 años y 8 meses.
C) 36 años y 2 meses.
D) 37 años y 4 meses.
E) 35 años y 5 meses.

29. Karla nació en noviembre y el 10 de diciembre del mismo año tiene una edad igual al número de días transcurridos del primero de noviembre al día de su nacimiento. ¿Qué fecha será cuando a partir de la fecha de su nacimiento transcurran tantos días como la mitad de los días que faltan para culminar el mes de su nacimiento?

A) 26 de noviembre
B) 24 de noviembre
C) 25 de noviembre
D) 27 de noviembre
E) 28 de noviembre

30. Si en junio del 2004 se suman los años de nacimiento de 5 personas que conforman una familia y luego a este resultado se le suma las edades de cada uno se obtiene 10 018. ¿Cuántas personas aún no cumplen años?

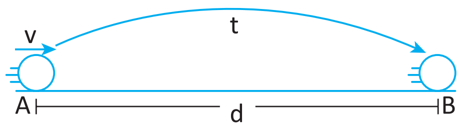
A) 1 B) 2 C) 3 D) 0 E) 4

Claves

NIVEL 1	9. C	17. D	25. E
1. E	10. B	18. A	26. A
2. C	NIVEL 2	19. D	27. E
3. D	11. C	20. C	28. C
4. B	12. C	NIVEL 3	29. C
5. B	13. E	21. B	30. B
6. C	14. A	22. A	
7. D	15. D	23. B	
8. D	16. A	24. A	

Móviles

En este capítulo estudiaremos diversos problemas de móviles relacionados con el MRU.

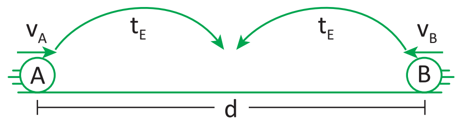


Donde:

d: distancia
v: velocidad
t: tiempo

$d = v \times t$ | $v = \dfrac{d}{t}$ | $t = \dfrac{d}{v}$

TIEMPO DE ENCUENTRO (t_E)

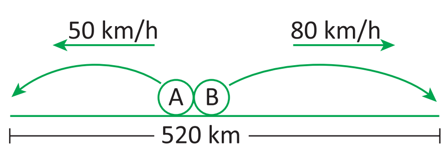


$$t_E = \frac{d}{v_A + v_B}$$

Donde:
t_E: tiempo de encuentro
d: distancia de separación
v_A; v_B: velocidades de los móviles

Ejemplo:
Dos móviles se encuentran juntos en un mismo punto, de pronto parten los dos en forma simultánea en sentidos opuestos con velocidades de 50 km/h y 80 km/h respectivamente. ¿Dentro de cuánto tiempo se encontrarán separados 520 km?

Resolución:



$v_A = 50$ km/h
$v_B = 80$ km/h
$d = 520$ km

Reemplazamos:

$$t_E = \frac{520}{50+80} = \frac{520}{130} = 4\text{ h}$$



Importante

Veamos una aplicación:
La velocidad de un móvil es de 72 km/h. ¿Cuál será su velocidad en m/s?

Transformamos las unidades:

$$72\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1\text{h}}{3600\text{ s}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{km}}$$

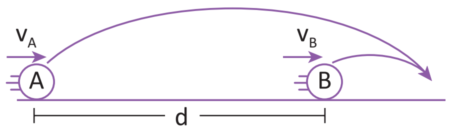
$$72 \times \frac{5\text{ m}}{18\text{ s}} = 20\text{ m/s}$$



Atención

El tiempo empleado en este caso sería el mismo que si los dos móviles partieran de los puntos extremos, yendo al encuentro, con las demás condiciones iguales; denominándose tiempo de encuentro (t_E).

TIEMPO DE ALCANCE (t_A)



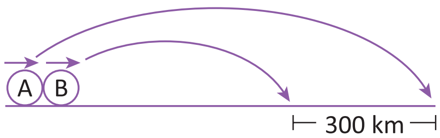
$$t_A = \frac{d}{v_A - v_B}$$

Donde:

t_A: tiempo de alcance
d: distancia de separación
v_A; v_B: velocidades de los móviles

Ejemplo:
Estando juntos en un mismo punto, dos móviles parten en forma simultánea en la misma dirección y sentido con velocidades de 90 km/h y 60 km/h respectivamente. ¿Dentro de cuánto tiempo uno de ellos estará 300 km delante de otro?

Resolución:



$v_A = 90$ km/h
$v_B = 60$ km/h
d = 300 km

Reemplazamos:

$$t_A = \frac{300}{90 - 60} = \frac{300}{30} = 10\text{ h}$$

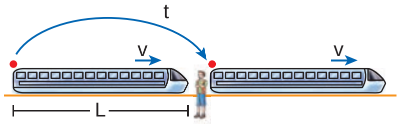
Atención

El tiempo empleado en este caso es el mismo que si los móviles partieran en sentidos iguales (contrarios a los del gráfico) estando separados inicialmente 300 km yendo uno al alcance del otro.



Casos particulares:

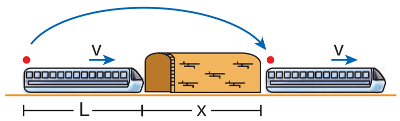
- Cuando un tren pasa delante de un observador.



$$L = v \times t$$

Donde:
L: longitud del tren
v: velocidad del tren
t: tiempo que tarda el tren en pasar totalmente delante del observador

- Cuando un tren pasa por un túnel.

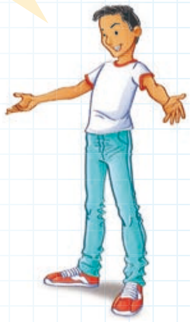


$$L + x = v \times t$$

Donde:
L: longitud del tren
v: velocidad del tren
t: tiempo que tarda el tren en pasar totalmente por el túnel

Recuerda

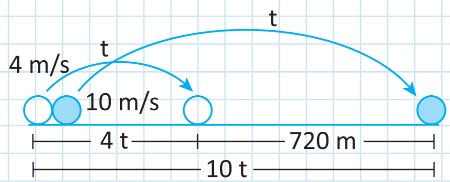
- Respecto al observador, este puede ser un poste, una antena, una personas, etc.
- No necesariamente es un túnel, también puede ser un puente, un canal, una vía, etc.



Problemas resueltos

1 Dos móviles parten simultáneamente del mismo punto y en la misma dirección con velocidades de 10 m/s y 4 m/s, respectivamente. ¿Después de cuánto tiempo estarán separados 720 m?

Resolución:

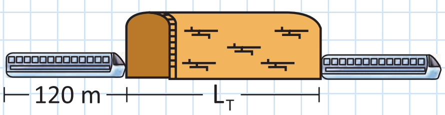


De los datos y del gráfico:

$$4t + 720\text{ m} = 10t$$
$$720\text{ m} = 6t$$
$$\therefore \quad t = 120\text{ s}$$

2 Un tren cuya longitud es 120 m, se demora 60 s en cruzar un túnel. Halla la longitud del túnel, si la rapidez del tren es 36 km/h.

Resolución:



Datos:

$L_T = 120$ m

$v_{tren} = 36\dfrac{\text{km}}{\text{h}} \times \dfrac{5}{18} = 10\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

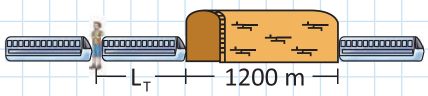
$t = 60$ s

Del gráfico:

$$d = v \times t$$
$$120\text{ m} + L_T = 10\text{ m/s} \times 60\text{ s}$$
$$120 + L_T = 600$$
$$\therefore \quad L_T = 480\text{ m}$$

3 Un tren, para atravesar un túnel de 1200 m de longitud tarda 70 s y en pasar delante de un observador tarda 20 s. ¿Cuál es la longitud del tren?

Resolución:



Para el observador:

$L_T = v(20) \quad$ ... (I)

Para el túnel:

$1200 + L_T = v(70) \quad$ ... (II)

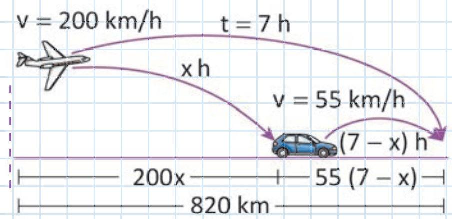
Reemplazamos (I) en (II):

$$1200 + 20v = 70v$$
$$1200 = 50v$$
$$v = 24\text{ m/s}$$

Luego: $L_T = 24(20) = 480$ m

4 Un hombre debe realizar un viaje de 820 km en 7 h. Si realiza parte del viaje en un avión a 200 km/h y el resto en auto a 55 km/h. Halla la distancia recorrida en avión.

Resolución:



Del gráfico:

$$200x + 55(7 - x) = 820$$
$$200x + 385 - 55x = 820$$
$$145x = 435$$
$$x = 3\text{ h}$$

$d_{avión} = v \times t$

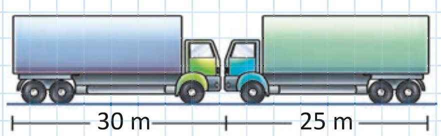
$= 200\text{ km/h} \times 3\text{ h} = 600\text{ km}$

5 Dos camiones de 30 m y 25 m, cada uno, van con velocidades de 54 km/h y 18 km/h, respectivamente. Sabiendo que se encuentran en sentidos opuestos, calcula el tiempo que tardarán en cruzarse totalmente.

Resolución:

$V_1 = 54$ km/h $\quad\quad V_2 = 18$ km/h

$= 15$ m/s $\quad\quad = 5$ m/s



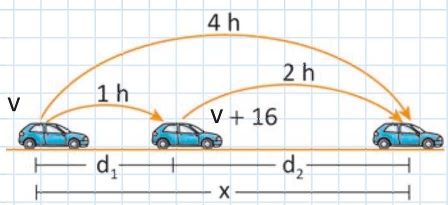
$$t_{cruce} = \frac{L_1 + L_2}{v_1 + v_2}$$

Reemplazando: $t_{cruce} = \frac{30\text{ m} + 25\text{ m}}{15\text{ m/s} + 5\text{ m/s}}$

$$t_{cruce} = \frac{55\text{ m}}{20\text{ m/s}} = 2{,}75\text{ s}$$

6 Un auto debe hacer cierto recorrido en 4 h. Una hora después de iniciado el recorrido aumentó su rapidez en 16 km/h, lo que le permite llegar 1 h antes. ¿Cuál fue la distancia recorrida?

Resolución:



Del gráfico:

$$\left.\begin{array}{l} d_1 = v \\ d_2 = 2(v + 16) \end{array}\right\} \quad x = d_1 + d_2 = 3v + 32 \quad \text{... (I)}$$

$x = 4v$ ... (II)

Reemplazamos (II) en (I):

$4v = 3v + 32$

$v = 32\text{ km/h}$

$\therefore\ x = 4(32) = 128\text{ km}$

7 Una lancha navega en un río a favor de la corriente de modo que avanza a razón de 48 km/h y cuando va en sentido contrario lo hace a 20 km/h. ¿A qué velocidad navegará en una laguna?

Resolución:

De los datos:

A favor de la corriente $\Rightarrow v = v_b + v_r$

En contra de la corriente $\Rightarrow v = v_b - v_r$

Reemplazamos:

$$\left.\begin{array}{l} 48 = v_b + v_r \\ 20 = v_b - v_r \end{array}\right\} (+)$$

$68 = 2v_b$

$\Rightarrow v_b = 34\text{ km/h}$

8 Dos ciclistas separados por una distancia de 120 km deben partir a un mismo tiempo. Si avanzan en un mismo sentido, se encuentran al cabo de 8 h; si lo hacen en sentido contrario, uno alcanza al otro al cabo de 5 h. La velocidad, en km/h del más veloz es:

Resolución:

Si avanzan en un mismo sentido, podemos aplicar tiempo de alcance:

$$t_A = \frac{d}{v_1 - v_2}$$

Reemplazamos: $8\text{ h} = \frac{120\text{ km}}{v_1 + v_2}$

$v_1 - v_2 = 15\text{ km/h}$ ... (I)

Si avanzan en sentido contrario, podemos aplicar tiempo de encuentro:

$$t_E = \frac{d}{v_1 + v_2}$$

Reemplazamos: $5\text{ h} = \frac{120\text{ km}}{v_1 + v_2}$

$v_1 + v_2 = 24\text{ km/h}$ ... (II)

De (I) y (II): $v_1 = 19{,}5\text{ km/h}$

$v_2 = 4{,}5\text{ km/h}$

$\therefore$ La velocidad del más veloz es 19,5 km/h.

9 En una carrera, un ciclista conduce a 20 m/s y llegó a la meta 4 s antes que otro. Si los tiempos empleados por ambos suman 28 s, ¿cuál fue la velocidad de este último?

Resolución:

Según los datos:

$v_1 = 20\text{ m/s}$ $\quad v_2 = v$

$t_1 = x - 4$ $\quad t_2 = x$

Suman 28 s

$x - 4 + x = 28$

$2x = 32$

$x = 16\text{ s}$

Reemplazamos:

$d_1 = v_1 \times t_1 = 20 \times 12 = 240$ m

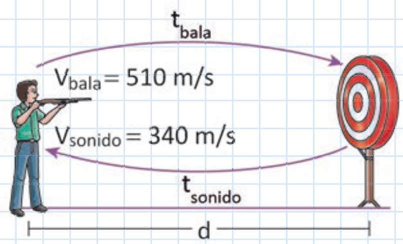
$d_2 = v_2 \times t_2 = v \times 16 = 16v$

Como: $d_1 = d_2 \Rightarrow 16v = 240$

$\therefore\ v = 15$ m/s

10 Un hombre dispara su rifle sobre un blanco. Dos segundos después de disparar oye el sonido de la bala al dar en el blanco. Si la velocidad del sonido es 340 m/s y la velocidad de la bala es 510 m/s, ¿a qué distancia está el blanco?

Resolución:



Del gráfico:

$$t_{bala} + t_{sonido} = 2$$

$$\frac{d}{510} + \frac{d}{340} = 2$$

$$\frac{d}{170}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 2$$

$$\frac{d}{170} \times \frac{5}{6} = 2$$

$$\therefore\ d = 408 \text{ m}$$

11 Juan toma todos los días un microbús para ir a su colegio a las 7:00 a.m.; pero hoy perdió el microbús, y este pasó 10 minutos después del primero y arribó en el doble del tiempo normal, llegando a las 7:24 a.m. ¿Cuál fue la hora de su partida?

Resolución:

Para el primer microbús:

Sea: y = hora de partida

x = tiempo normal empleado por el microbús

Entonces, Juan aborda el microbús a las:

$y = (7{:}00 - x)$ a.m. ... (I)

Para el segundo bus:

Tiempo transcurrido desde la partida:

$2x + 10$ min

Luego: $y = 7{:}24$ a. m. $- (2x + 10$ min$)$ ... (II)

Igualamos (I) y (II):

$7{:}00 - x = 7{:}24 - (2x + 10 \text{ min})$

$\Rightarrow x = 14$ min

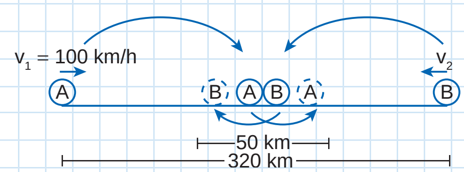
Reemplazamos en (I):

$y = 7$ h $- 14$ min

$\therefore\ y = 6{:}46$ a.m.

12 Dos móviles se encuentran separadas 320 km, uno de ellos tiene una velocidad de 100 km/h. Si parten simultáneamente uno al encuentro del otro a las 9:00 a.m., encontrándose al cabo de 2 horas. ¿A qué hora estarán separados 50 km, por segunda vez?

Resolución:



Empleamos fórmula del tiempo de encuentro:

$$t_E = \frac{320}{v_1 + v_2} = 2 \Rightarrow 2 = \frac{320}{100 + v_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = 60 \text{ km/h}$$

Calculamos el tiempo de alejamiento:

$$t_{\ alejamiento} = \frac{50}{v_1 + v_2} = \frac{50}{160}$$

$$t_{\ alejamiento} = 18 \text{ min } 45 \text{ s}$$

Estarán separados por segunda vez a las:

11:00 a.m. + 18 min 45 s = 11 h 18 min 45 s

Actividades de razonamiento

1. Un corredor que parte de **A** da una ventaja de 300 m a otro que parte de **B**. Si el primero recorre 3 metros por segundo más que el otro. ¿A qué distancia de B lo alcanzará? (v_B = 45 km/h)

A) 1320 m B) 1800 m C) 1150 m
D) 1250 m E) 1350 m

2. Un tren cruza un poste en 8 s y un túnel de 400 m lo cruza en 10 s. ¿Cuál es la longitud del tren?

A) 1900 m B) 1600 m C) 1700 m
D) 1500 m E) 1800 m

3. Si un bote cruza el largo de un lago a 18 km/h, demoraría 15 minutos menos que si lo hubiera cruzado a 12 km/h. ¿Cuál es la longitud del lago en kilómetros?

A) 9 km B) 8 km C) 4 km
D) 7 km E) 6 km

4. Un auto recorre 400 km a una velocidad constante. Si aumentara su velocidad en 20 km/h, el viaje duraría una hora menos, ¿cuál es su velocidad?

A) 90 km/h B) 60 km/h C) 80 km/h
D) 70 km/h E) 100 km/h

5. Dos móviles parten de un mismo punto y se mueven en el mismo sentido con velocidades de 37 m/s y 63 m/s. Delante de ellos a 500 m hay un poste, ¿después de qué tiempo los móviles equidistan del poste?

A) 15 s B) 12 s C) 20 s D) 8 s E) 10 s

6. En una pista circular de 3000 m, dos atletas parten simultáneamente, pero en sentidos opuestos, cruzándose al cabo de 20 minutos, y luego, 5 minutos más tarde, el más rápido llegó al punto de partida. Halla la rapidez del otro atleta.

A) 10 m/min B) 30 m/min C) 40 m/min
D) 80 m/min E) 50 m/min

7. Un camión se mueve con rapidez constante de 20 m/s acercándose perpendicularmente a una gran pared. En el instante t = 0 el chofer emite una señal sonora y cuando ha avanzado 8 m, recibe el eco. Entonces la distancia que se encuentra la pared desde la posición que emitió el sonido es: (v_{sonido} = 340 m/s)

A) 72 m B) 18 m C) 40 m
D) 36 m E) 25 m

8. El alta voz situado entre dos edificios emite un sonido hacia la derecha. El eco de dicho sonido llega al edificio de la izquierda en 1,5 s luego de ser emitido. Si el parlante se encuentra a 30 m del edificio de la izquierda, ¿cuál es la distancia entre los edificios? (v_{sonido} = 340 m/s)

A) 200 m B) 220 m C) 180 m
D) 270 m E) 300 m

9. Un ciclista cuya rapidez es 24 m/s se encuentra a 8 m de la parte trasera de un tráiler cuya longitud es 22 m y rapidez 18 m/s. Si ambos se encuentran en una carretera, viajando en un mismo sentido. Halla al tiempo para que el ciclista adelante al tráiler por 60 m.

A) 30 s B) 15 s C) 25 s
D) 35 s E) 20 s

10. El tiempo que demoran en encontrarse dos autos que viajan en sentidos contrarios y separados inicialmente por 80 m es 20 s, y si viajasen en el mismo sentido, el de mayor rapidez alcanza al otro en 40 s. Determina la rapidez de cada auto.

A) 4 m/s y 2 m/s B) 2 m/s y 1 m/s
C) 3 m/s y 1 m/s D) 3 m/s y 4 m/s
E) 3 m/s y 2 m/s

11. Dos trenes de igual longitud se desplazan en sentidos contrarios, uno a una velocidad de 72 km/h y el otro a 36 km/h. ¿Cuántos segundos tardarán en cruzase, si cada tren tiene una longitud de 120 m?

A) 12 s B) 8 s C) 18 s D) 32 s E) 16 s

12. La rapidez de un bote de ida es 20 km/h; cuando va de regreso (contra la corriente), logra una rapidez de 15 km/h. Halla el espacio recorrido de regreso si va de Iquitos a Nauta, sabiendo que de ida demora 5 horas menos que de regreso.

A) 300 km B) 250 km C) 400 km
D) 200 km E) 150 km

13. Un bote navega por un río, aguas arriba, describiendo una velocidad de 30 km/h y aguas abajo (a favor del río) a 50 km/h. Determina la velocidad del río en km/h.

A) 30 km/h B) 20 km/h C) 40 km/h
D) 25 km/h E) 10 km/h

14. Un hombre lleva a un amigo a su casa con una velocidad de **x** km/h y retorna con una velocidad de **y** km/h. Si emplea **z** horas, ¿cuál es la distancia que hay hasta la casa del amigo?

A) $\dfrac{xy}{(x+z)}$ B) $x+y+z$ C) $x\,y\,z$

D) $\dfrac{xyz}{(x+y)}$ E) $\dfrac{(x+y)}{(x+z)}$

Claves

1. D	5. E	9. B	13. E
2. B	6. B	10. C	14. D
3. A	7. A	11. B	
4. C	8. D	12. A	

Reto



Un roedor se encuentra a 20 m debajo de un halcón y al observarlo huye rectilíneamente hacia un agujero, que se encuentra a 15 m delante de él, con una rapidez constante de 3 m/s.
Determina la rapidez del halcón si este caza al roedor justo cuando ingresaba al agujero.

Rpta.: 5 m/s

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Un hombre rema 60 km río abajo empleando el mismo tiempo que emplea en remar 20 km río arriba. Halla la velocidad del bote en aguas tranquilas, si la velocidad de la corriente es 5 km/h.



A) 10 km/h B) 20 km/h C) 30 km/h
D) 40 km/h E) 50 km/h

2. Un auto se dirige de una ciudad **A** a otra **B** que distan **d** metros, con una rapidez v; de B regresa con v/2 y finalmente de **A** emplea v/4 para volver a la ciudad **B**. Halla el tiempo total de viaje.

A) 7 d/v B) 8 v/d C) 14 d/v
D) 21 v/d E) 15 d/v

3. Un ciclista se dirige de una ciudad **A** a otra **B** dividiendo su recorrido en tres partes iguales. El primer tramo lo recorre a una rapidez de 60 km/h, el segundo tramo a 30 km/h y el último a 20 km/h. Halla la rapidez media del ciclista.

A) 20 km/h B) 55 km/h C) 30 km/h
D) 60 km/h E) 40 km/h

4. Una persona sale todos los días de su casa a la misma hora y llega a su trabajo a las 10:00 h; un día se traslada al triple de la velocidad original y llega a su trabajo a las 8:00 h. ¿A qué hora sale siempre de su casa?

A) 7:00 h B) 6:00 h C) 5:00 h
D) 4:00 h E) 9:00 h

5. Luis y Alberto parten de una ciudad a otra, situada a 24 km de la primera; Luis lo hace con una rapidez de 2 km por hora menos que Alberto, llegando a su destino con una hora de retraso. ¿Cuál es la rapidez de Luis?

A) 5 km/h B) 4 km/h C) 6 km/h
D) 8 km/h E) 9 km/h

6. Dos trenes parten al encuentro desde poblaciones separadas a 870 km, al mismo tiempo. El tren de pasajeros viaja a 80 km/h y el tren de carga a 65 km/h. ¿Cuántas horas necesitan para encontrarse?

A) 5 h B) 6 h C) 7 h D) 8 h E) 9 h

7. Dos móviles están separados por una distancia de 2300 metros. Si se desplazan al encuentro con rapideces de 60 m/s y 40 m/s, respectivamente, ¿al cabo de cuánto tiempo estarán separados 1300 m por primera vez?

A) 12 s B) 8 s C) 10 s D) 15 s E) 13 s

8. Un tren demora 8 segundos en pasar delante de un semáforo y el triple de tiempo en cruzar un puente de 400 m de largo. ¿Cuál es su longitud?

A) 200 m B) 180 m C) 160 m
D) 280 m E) 400 m

9. Dos ciclistas corren sobre una pista circular de 360 metros de longitud. Si van en el mismo sentido, el primero pasa al segundo en todos los minutos; cuando ellos marchan en sentido contrario ellos se cruzan a intervalos regulares de 12 segundos. ¿Cuáles son las velocidades de los ciclistas en metros por segundo, respectivamente?



A) 15 m/s y 18 m/s　　B) 18 m/s y 14 m/s
C) 15 m/s y 12 m/s　　D) 18 m/s y 12 m/s
E) 15 m/s y 14 m/s

NIVEL 2

10. Juan es un "caminante" que debe recorrer 2000 m en media hora. Si parte del camino lo hace corriendo a razón de 6 m/s y el resto caminando a 1 m/s. Indica con una (V) si es verdadera o una (F) si es falsa, las proposiciones.

I. ( ) Juan corre durante 40 segundos.
II. ( ) Caminando recorre 1760 m.
III. ( ) Camina durante 1760 segundos.

A) FFV　B) VFV　C) VVV　D) VVF　E) FFF

11. Un hombre conduce su coche hacia una ciudad a 60 km/h y llega una hora más temprano que si hubiera manejado a 50 km/h. Determina la distancia recorrida.

A) 200 km　B) 500 km　C) 600 km
D) 400 km　E) 300 km

12. Una madre y su hija trabajan juntas en la misma oficina. Para ir de su casa a la oficina, la hija emplea 30 minutos y la madre, 40 minutos. ¿En cuánto tiempo alcanzará la hija a su madre, si esta sale 8 minutos antes?

A) 28 min　B) 24 min　C) 20 min
D) 18 min　E) 22 min

13. Un móvil tiene una velocidad que es el doble de otro; y una ventaja sobre él de 50 km. Al cabo de "x" horas la ventaja se ha duplicado y al cabo de $(x + 1)$ h se ha hecho todavía el doble de lo que era una hora antes. Halla, en km/h, la velocidad del móvil más lento.

A) 100 km/h　B) 150 km/h　C) 250 km/h
D) 200 km/h　E) 300 km/h

14. Todos los días sale del Cusco hacia Arequipa un ómnibus a 40 km/h. Este se cruza siempre a las 11 h, con un ómnibus que va de Arequipa hacia Cusco con una velocidad de 35 km/h. Cierto día el ómnibus que sale del Cusco encuentra malogrado al otro a las 12:45 h. ¿A qué hora se malogró ese ómnibus?

A) 12:45 h　B) 11:00 h　C) 10:45 h
D) 10:00 h　E) 9:00 h

15. Un microbús debía cubrir cierta distancia en un determinado tiempo, pero como el conductor era novato, recorrió todo el trayecto con 1/5 menos de la velocidad normal y llegó con un retraso de 4 horas. ¿En cuántas horas debió llegar normalmente?

A) 12 horas　B) 18 horas　C) 15 horas
D) 19 horas　E) 16 horas

16. La velocidad de **A** es 10 km/h mayor que la de **B**. Si **A** en 16 horas recorre lo mismo que **B** en 20 horas, ¿en cuánto tiempo se encontrarían, si salieran en sentidos contrarios desde 2 ciudades distantes 450 km?

A) 3 h B) 4 h C) 7 h D) 9 h E) 5 h

17. Dos motociclistas, Mariano y José disputan una carrera, cuyo recorrido es 30 km. Si Mariano le da a José 6 km de ventaja, llegan al mismo tiempo a la meta; en cambio si le da 3 km de ventaja solamente, le gana por 10 minutos. ¿Cuánto más rápido es Mariano que José?

A) 3,5 km/h B) 22,5 km/h C) 18 km/h
D) 4,5 km/h E) 14,5 km/h

18. Un alumno desea calcular la distancia entre su casa y cierta tienda. Observa que caminando a razón de 6 m/s tarda 4 segundos más que caminando a 8 m/s. ¿Cuál es la distancia mencionada?

A) 92 m B) 89 m C) 98 m D) 96 m E) 69 m

19. Un tren demora 13 minutos en pasar por delante de Pamela y 25 minutos en cruzar un puente de 600 metros. Calcula la longitud del tren.

A) 480 m B) 680 m C) 560 m
D) 1300 m E) 650 m

NIVEL 3

20. Un campesino va caminando de su casa hacia su chacra. Parte a medianoche y recorre 70 m cada minuto. En cierto trecho del camino sube a la moto de un amigo que había partido del mismo lugar a las 0 horas 20 minutos con una rapidez de 150 m/min. El campesino llega a su destino 20 minutos antes que si hubiese continuado caminando. Calcula la distancia entre la casa y la chacra.

A) 5450 m B) 5250 m C) 4500 m
D) 4250 m E) 600 m

21. La rapidez de un bote de ida es 20 km/h; cuando va de regreso (contra la corriente), logra una rapidez de 15 km/h. Halla la distancia total recorrida si va de Iquitos a Nauta y viceversa, sabiendo además que de ida demora 5 horas menos que de regreso.



A) 500 km B) 150 km C) 225 km
D) 600 km E) 180 km

22. Para ir de la ciudad **A** a la ciudad **B**, Luisa camina a razón de 70 km/h y para regresar de la ciudad **B** a la ciudad **A** utiliza una velocidad de 30 km/h. Halla la distancia AB recorrida por Luisa, sabiendo que en total su viaje le ha tomado 20 horas.

A) 420 km B) 400 km C) 410 km
D) 405 km E) 450 km

23. Un automóvil hace el recorrido de **x** hacia **y** en 2 h 40 m, al regresar de **y** hacia **x** aumenta la velocidad en 20 km/h y tarda 2 horas. ¿Cuál es la distancia entre **x** e **y**? **UNMSM-2004 II**

A) 100 km B) 180 km C) 150 km
D) 120 km E) 160 km

24. Dos trenes cuyas longitudes son 147 m y 103 m, marchan sobre vías paralelas en el mismo sentido. Si la velocidad del primero es 48 m/s y el segundo demoró 50 segundos en pasarlo, calcula la velocidad del último tren.

A) 25 m/s B) 15 m/s C) 12 m/s
D) 35 m/s E) 53 m/s

25. Un avión provisto de un radio de 60 km de alcance, parte del Callao al encuentro de un barco cuya velocidad es la quinta parte de la suya (avión). Cuando sus mensajes alcanzan al barco, este responde que llegará al Callao dentro de 15 horas. El avión regresa inmediatamente y puede anunciar la noticia al Callao por medio de su radio cinco horas después de su partida del Callao. Determina la velocidad del barco.

A) 72 km/h B) 30 km/h C) 36 km/h
D) 60 km/h E) 48 km/h

26. Un ciclista va por una carretera, con velocidad constante y observa que el poste kilométrico indica $\overline{ab}$ km. Luego de una hora de recorrido observa $\overline{ba}$ km y una hora después se encuentra en el kilómetro $\overline{a0b}$. ¿Cuál es la velocidad del ciclista? Dato: 0 = cero

A) 32 km/h B) 30 km/h C) 40 km/h
D) 45 km/h E) 50 km/h

27. Juan salió de su hacienda a una velocidad constante rumbo a Cajamarca. Al cabo de 4 horas había recorrido los 3/5 de su camino, pero le faltaba recorrer 76 km. ¿A qué velocidad viajaba Juan? **UNMSM-2005 I**

A) A menos de 27 km/h B) A más de 28 km/h
C) A más de 30 km/h D) A menos de 19 km/h
E) A más de 29 km/h

28. ¿Cuántas horas emplea un tren que viaja a una velocidad promedio de 40 km/h entre 2 ciudades, para recorrer **a** kilómetros, si hace **n** paradas de **m** minutos cada una?

A) $\frac{a+2mn}{60}$ B) $\frac{3a-2m}{60}$ C) $\frac{2a-3m}{60}$
D) $\frac{3a+2mn}{120}$ E) $\frac{3a+5mn}{60}$

29. Un barco **A** está a 40 millas al oeste de otro **B**. El barco **A** se está moviendo hacia el este a 40 millas por hora y el barco **B** hacia el norte a 20 millas por hora. ¿Cuál es la distancia entre los 2 barcos después de 3 horas?

A) 80 millas B) 90 millas C) 100 millas
D) 110 millas E) 120 millas

Claves

NIVEL 1	8. A	15. E	22. A
1. A	9. D	16. E	23. E
2. A	**NIVEL 2**	17. D	24. E
3. C	10. C	18. D	25. C
4. A	11. E	19. E	26. D
5. C	12. B	**NIVEL 3**	27. B
6. B	13. A	20. B	28. D
7. C	14. E	21. D	29. C

Cronometría

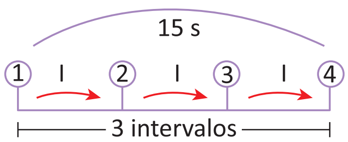
Respecto a este tema, existen diversos problemas, entonces, para un mejor entendimiento los clasificaremos de la siguiente manera:

Problemas sobre campanadas.
Problemas sobre tiempo transcurrido y tiempo que falta transcurrir.
Problemas sobre adelantos y atrasos.
Problemas sobre ángulos formados por las manecillas de un reloj.

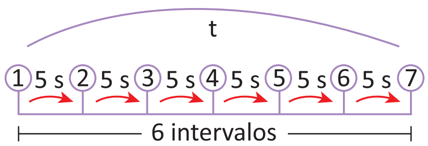
CAMPANADAS

Ejemplo:
Un reloj da 4 campanadas en 15 s. ¿En cuánto tiempo dará 7 campanadas?

Resolución:



$$I = \frac{15}{3} = 5$$



$$t = 5 \cdot 6 = 30 \text{ s}$$

∴ El tiempo es 30 s.

Conclusiones:

$$\text{Número de campanadas} = \text{Número de Intervalos} + 1$$

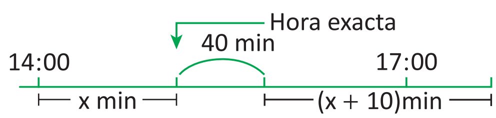
$$\text{Tiempo total} = \left(\text{Número de Intervalos}\right) \times \left(\text{Tiempo de cada Intervalo}\right)$$

TIEMPO TRANSCURRIDO Y TIEMPO QUE FALTA TRANSCURRIR

Ejemplo:
¿Qué hora es?, si dentro de 40 minutos faltarán para las 17:00 h, 10 minutos más que los minutos transcurridos desde las 14 h.

Resolución:

- Del enunciado del problema planteamos:



Nota

Otra forma de resolución para el ejemplo de campanadas:
4 campanadas ⟶ 15 s
7 campanadas ⟶ x

Luego:
4 campanadas <> 3 intervalos
7 campanadas <> 6 intervalos
15 s ⟶ 3 intervalos
x ⟶ 6 intervalos
3x = 15 . 6
x = 30 s

Importante

Para expresar el número de intervalos, al número de campanadas le restamos una unidad.

Ejemplo:

7 campanadas <> 6 intervalos
5 campanadas <> 4 intervalos
3 campanadas <> 2 intervalos



Atención

Para el desarrollo de este tipo de problemas nos ayudaremos de un gráfico representado por una recta, tomando como base un día que tiene 24 horas y de acuerdo a los datos dividiremos la recta en partes.



- Desde las 14:00 h hasta las 17:00 h son 3 h <> 180 min
- Del gráfico: $x + 40 + (x + 10) = 180$
  $2x + 50 = 180$
  $2x = 130 \Rightarrow x = 65$ min

- Luego: 14:00 + 65 min = 15:05 h
  ∴ La hora es 15:05.

ADELANTOS Y ATRASOS

Ejemplo 1:
Un reloj tiene 2 minutos de atraso y se atrasa 2 minutos cada 3 horas transcurridas. Sabiendo que son las 12:00 del mediodía de un miércoles, ¿cuándo y a qué hora el reloj tendrá un atraso de 1 hora?

Resolución:
- Como el reloj presenta 2 minutos de atraso y se quiere que complete 1 hora de atraso, entonces falta atrasarse 58 minutos.

- Luego: si se atrasa 2 minutos en 3 horas, entonces para que se atrase 58 minutos, debe transcurrir 87 horas, es decir:



- El tiempo que debe transcurrir es 87 h que equivale a 3 días y 15 horas.

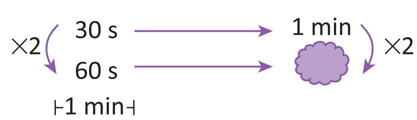
- Luego: miércoles 12:00 m + 3 días 15 h ⇒ domingo 3:00 a.m.

  ∴ El reloj tendrá un atraso de 1 hora el día domingo a las 3:00 a.m.

Ejemplo 2:
Se sabe que un reloj se adelanta 30 s cada minuto. Si empieza retrasado 5 min, respecto de la hora normal. ¿Dentro de cuánto tiempo tendrá un adelanto de 7 minutos respecto de la hora normal?

Resolución:
- Como el reloj está retrasado 5 minutos, entonces para que marque la hora correcta debe adelantarse 5 minutos y a partir de ahí tenga un adelanto de 7 minutos entonces debe adelantarse en total: 5 minutos + 7 minutos = 12 minutos.

- Luego:



- Se puede ver que se adelanta 1 min cada 2 min que transcurre, entonces para que tenga un adelanto de 12 min debe transcurrir 24 min.

  ∴ Dentro de 24 min.

Recuerda

Si el reloj está atrasado, entonces la hora que marca será la hora real menos el atraso, esto es:

HM = HR – atraso

Donde:
HM: hora marcada
HR: hora real



Atención

Si el reloj está adelantado, entonces la hora que marca será la hora real más el adelanto, esto es:

HM = HR + adelanto

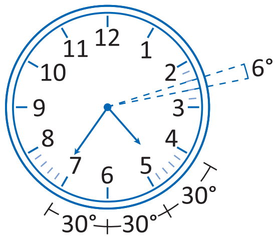
Donde:
HM: hora marcada
HR: hora real



Nota

- La circunferencia del reloj está dividida en 12 partes.
- Cada parte tiene una medida de 30°.
- Cada parte tiene 5 divisiones.
- Cada división tiene una medida de 6°.
- 1 hora equivale a 60 minutos y cada minuto a 60 segundos.
- La circunferencia representa 360°.

ÁNGULO FORMADO POR LAS MANECILLAS DE UN RELOJ

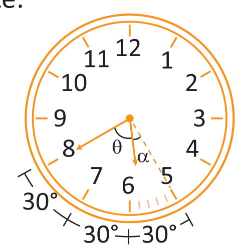


Analicemos el recorrido del horario y el minutero:

Recorrido del minutero	Recorrido del horario
60 min	5 min o 30°
30 min	2,5 min o 15°
24 min	2 min o 12°
12 min	1 min o 6°
m min	(m/12)min o (m/2)°

Ejemplo:
Halla el ángulo formado por las manecillas del reloj cuando son las 5:40.

Resolución:
Gráficamente:



- $\alpha = \left(\frac{40}{2}\right)^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$
- $\underbrace{\alpha} + \theta = 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ$

$20^\circ + \theta = 90^\circ$

$\Rightarrow \theta = 70^\circ$

En general:
Sea la hora H: M
θ: el ángulo que forman las manecillas del reloj

- Cuando el horario adelanta al minutero:

$$\theta = 30H - \frac{11}{2}M$$

- Cuando el minutero adelanta al horario:

$$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$$

En el ejemplo anterior usando la segunda relación (ya que el minutero adelanta al horario), se tiene:

$$\theta = \frac{11}{2}M - 30H$$

$$\theta = \frac{11}{2}(40) - 30(5)$$

$$\theta = 220 - 150$$

$$\Rightarrow \theta = 70^\circ$$

Observación

Cada vez que el minutero avanza una cantidad en minutos, entonces el horario avanza en minutos la doceava parte o también la mitad de dicha cantidad, pero en grados.

Ejemplo:

Minutero	Horario
48 min	4 min o 24°
36 min	3 min o 18°
18 min	1,5 min o 9°



Atención

Para esta clase de problemas se recomienda analizar a partir de la hora exacta a la hora indicada.

Ejemplo:

Hora indicada	Hora exacta
1:28	1:00
3:17	3:00
5:23	5:00

Nota

Cuando el horario marca las 12 h se toma H = 0.
Ejemplo:
¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a las 12:24?
M = 24 ; H = 0

$\theta = \frac{11}{2}(M) - 30(H)$

$\theta = \frac{11}{2}(24) - 30(0)$

$\theta = 132^\circ$



Atención

- Cuando las manecillas del reloj se oponen, el ángulo que forman es 180°.
- Cuando las manecillas del reloj se superponen, el ángulo que forman es 0°.

Problemas resueltos

1 Un reloj indica la hora con igual número de campanadas. Si para dar las 3 horas se demora un segundo, ¿cuánto tardará en dar las 9 horas?

Resolución:

3 camp ⟶ 1 s
9 camp ⟶ x

Luego: 3 campanadas <> 2 intervalos
9 campanadas <> 8 intervalos

Entonces: 2 int ⟶ 1 s
8 int ⟶ x

$2x = 8$

$\therefore x = 4$ s

2 Un reloj da $(m + 3)$ campanadas en $(m - 3)$ segundos. ¿En cuántos segundos dará $(m^2 - 3)$ campanadas?

Resolución:

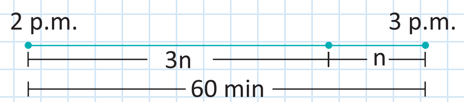
Campanadas	Intervalo		Tiempo
$(m + 3)$	$(m + 2)$	⟶	$(m - 3)$
$(m^2 - 3)$	$(m^2 - 4)$	⟶	x

$(m + 2)x = (m^2 - 4)(m - 3)$

$\therefore x = (m - 2)(m - 3)$ s

3 Son más de las 2 p.m., pero aún no son las 3 p.m. Si los minutos transcurridos desde las 2 p.m. es el triple de los minutos que faltan transcurrir para que sea las 3 p.m. ¿Qué hora es?

Resolución:



Del gráfico:

$3n + n = 60$

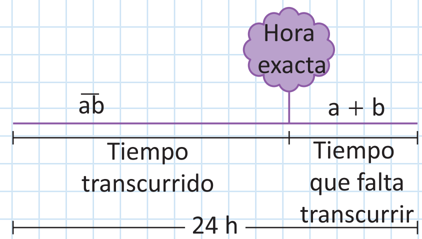
$4n = 60$

$n = 15 \Rightarrow 3n = 45$

$\therefore$ Hora exacta: 2:45 p.m.

4 Si quedan del día, en horas, la suma de las dos cifras que forman el número de las horas transcurridas, ¿qué hora es actualmente?

Resolución:



Del gráfico:

$\overline{ab} + a + b = 24$

$10a + b + a + b = 24$

$11a + 2b = 24$

$\downarrow \quad \downarrow$

$2 \quad 1$

Horas transcurridas: $\overline{ab} = 21$ h

$\therefore$ Son las 21 h o 9:00 p.m.

5 Un reloj se empieza a atrasar 5 min por cada hora que pasa. ¿Cuánto tiempo debe pasar para que este reloj vuelva a marcar la misma hora que el reloj normal?

Resolución:

Para que un reloj vuelva a marcar la hora exacta, se debe retrasar 12 h = 720 min.

5 min ⟶ 1 h
720 min ⟶ x

$5x = 720$

$x = 144$ h

$\therefore$ Tiene que pasar 144 h o 6 días.

6 Cierto reloj se adelanta 4 min cada 5 h. ¿Qué hora será en realidad cuando el reloj marque las 11:00 h, si hace 20 h que empezó a adelantarse?

Resolución:

4 min ⟶ 5 h
x ⟶ 20 h

$5x = 20 \cdot 4 \Rightarrow x = 16$ min

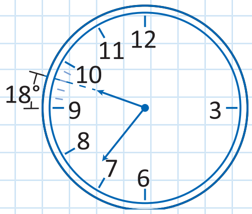
Luego: HR = 11:00 – 16 min

$\therefore$ HR = 10:44 h

7 Isabel al ver la hora confunde el minutero por el horario y viceversa; y dice: "son las 7 h 48 min". ¿Qué hora es realmente?

Resolución:

La posición de las agujas es la siguiente:



Hora que observó Isabel:
7 h 48 min (hora incorrecta)
Para saber la hora correcta recordar:

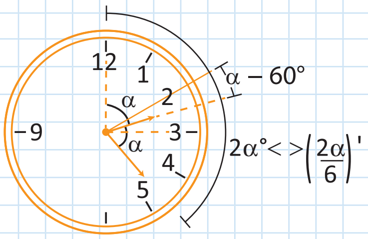
Horario	Minutero
$\left(\frac{x}{2}\right)^{\circ}$	x min
18°	36 min

$\therefore$ Son las 9 h 36 min.

8 ¿A qué hora inmediatamente después de las 2 el minutero adelanta al horario tanto como el horario adelanta a la marca de las 12?

Resolución:

Por condición del problema las agujas del reloj están en la posición mostrada.



Sabemos que:

$$\frac{h}{m} = \frac{1}{2}$$

h: recorrido del horario (en grados)
m: recorrido del minutero (en minutos)
En el problema:

$$\frac{\alpha - 60^{\circ}}{(2\alpha)/6} = \frac{1}{2}$$

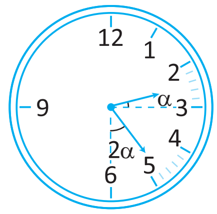
$$12\alpha - 720^{\circ} = 2\alpha$$

$$10\alpha = 720^{\circ} \Rightarrow \alpha = 72^{\circ}$$

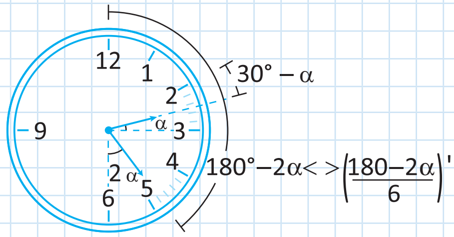
El minutero marca: $\left(\frac{2\alpha}{6}\right)\text{min} = 2 \cdot \frac{72}{6} = 24 \text{ min}$

$\therefore$ Será a las 2 h 24 min.

9 ¿Qué hora marca el reloj mostrado en la figura?



Resolución:



Aplicando:

$$\frac{h}{m} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{30^{\circ} - \alpha}{(180^{\circ} - 2\alpha)/6} = \frac{1}{2}$$

$$360^{\circ} - 12\alpha = 180^{\circ} - 2\alpha$$

$$180^{\circ} = 10\alpha \Rightarrow \alpha = 18^{\circ}$$

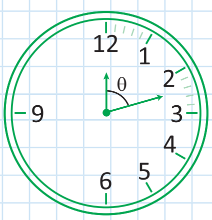
El minutero marca:

$$\left(\frac{180 - 2\alpha}{6}\right)' = \left(\frac{180 - 2 \cdot 18}{6}\right)' = 24'$$

$\therefore$ La hora que marca es 2 h 24 min.

10 ¿Qué ángulo forman entre sí las agujas de un reloj a las 12:12 horas?

Resolución:



Cuando un reloj marca 12 h, se toma H = 0, además M = 12.
Como el minutero adelanta al horario:

Aplicamos: $\theta = \frac{11}{2}M - 30\,H$

$$\theta = \frac{11}{2}(12) - 30(0)$$

$$\therefore \theta = 66^{\circ}$$

Actividades de razonamiento

1. En cierto momento del día, las horas transcurridas son los 3/5 de lo que falta por transcurrir. ¿Qué hora es?

   A) 10:00 p.m. B) 9:00 a.m. C) 7:00 p.m.
   D) 6:00 a.m. E) 9:00 p.m.

2. Faltan para las 9 horas la mitad de minutos que pasaron desde las 7 horas. ¿Qué hora marca el reloj?

   A) 8 h 20 min B) 7 h 40 min C) 6 h 50 min
   D) 7 h 30 min E) 8 h 40 min

3. Son más de las 6:00 a.m., pero todavía no son las 10:00 a.m., si los minutos que transcurrieron es a los minutos que faltan por transcurrir como 3 es a 5. ¿Qué hora será dentro de 4 horas?

   A) 11 h 20’ B) 7 h 30’ C) 8 h 30’
   D) 11 h 30’ E) 6 h 30’

4. Andrea pregunta: ¿Qué hora es? y, Manuel le responde: “Ya pasaron las 11 y falta poco para las 12. Además dentro de 13 minutos faltará para las 13 horas la misma cantidad de minutos que habían pasado desde las 11 hace 7 minutos”. ¿Qué hora es?

   A) 11 h 40’ B) 11 h 38’ C) 11 h 50’
   D) 11 h 45’ E) 11 h 57’

5. Si fuera 3 horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día 5/7 de lo que faltaría, si es que fuera 3 horas más temprano. ¿Qué hora es?

   A) 7:00 a.m. B) 8:00 a.m. C) 6:00 a.m.
   D) 11:00 a.m. E) 4:00 a.m.

6. Un campanario tarda 3 segundos en tocar 3 campanadas. ¿En 9 segundos cuántas campanadas tocará?

   A) 5 B) 8 C) 10 D) 7 E) 9

7. Un campanario tarda 4 segundos en tocar 5 campanadas. ¿Cuánto tiempo demora en tocar 10 campanadas?

   A) 9 s B) 10 s C) 8 s D) 7 s E) 6 s

8. Un reloj de alarma da 73 “beep” en 15 segundos. ¿Cuánto se demorará para dar 19 “beep”?

   A) 2,5 s B) 3,75 s C) 3,78 s
   D) 3,76 s E) 3,5 s

9. Un reloj demora $(x^2 - 1)$ segundos en tocar x^2 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en $(x - 1)$ segundos?

A) $x - 1$ B) x^2 C) 1
D) x E) $x + 1$

10. Siendo las 2 p.m. un reloj empieza a adelantarse a razón de 2 minutos por cada hora. ¿Qué hora marcará este reloj cuando sean las 2 a.m. del día siguiente?

A) 2:24 a.m. B) 2:22 a.m. C) 3:20 a.m.
D) 2:18 a.m. E) 2:17 a.m.

11. Un reloj se atrasa 2 minutos cada 8 minutos. Si ahora marca 4 h 10’ y hace 3 horas que se atrasa, entonces la hora correcta es:

A) 4 h 30’ B) 4 h 55’ C) 4 h 40’
D) 4 h 50’ E) 4 h 35’

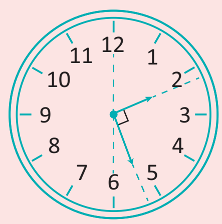
12. Un reloj se adelanta 2 minutos por hora. ¿Cuántos días como mínimo deberán transcurrir para que vuelva a marcar la hora correcta?

A) 20 días B) 10 días C) 15 días
D) 30 días E) 25 días

13. Faltan 5 min para las 12. ¿Qué ángulo estarán formando las agujas del reloj?

A) 24,4° B) 25,5° C) 20°
D) 27,2° E) 27,5°

14. ¿Qué hora indica el reloj mostrado en la figura?



A) 2 h 25 min B) 2 h 28 min C) 2 h 27 min
D) 2 h 23 min E) 2 h 22 min

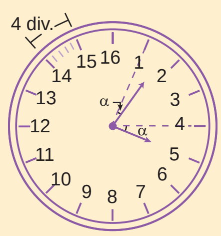
Claves

1. B	5. C	9. D	13. E
2. A	6. D	10. A	14. C
3. D	7. A	11. B	
4. E	8. B	12. C	

Reto

¿Qué hora es según el gráfico?





Rpta.: 4 h $4\frac{4}{15}$ min

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Una campana toca 3 campanadas en 7 segundos. ¿Cuántos segundos tardará en tocar 7 campanadas?

   A) 20 B) 21 C) 27
   D) 19 E) 18

2. El reloj de la catedral indica la hora con igual número de campanadas. Si tarda 6 segundos en dar las 4 h, ¿cuánto tardará en dar las 20 h?.

   A) 12 s B) 13 s C) 16 s
   D) 14 s E) 15 s

3. Un reloj da 12 campanadas en 12 segundos. ¿Cuánto demora en dar 34 campanadas?

   A) 36 s B) 32 s C) 33 s
   D) 35 s E) 34 s

4. Un reloj se adelanta 2 minutos cada 3 h. ¿A qué hora empezó a adelantarse, si a las 11 h 15 min de la noche marca las 11 h 27 min?

   A) 5:18 a.m. B) 5:17 a.m. C) 5:22 a.m.
   D) 5:21 a.m. E) 5:15 a.m.

5. Faltan para las 9 h la mitad de minutos que pasaron desde las 6 h. ¿Qué hora marca el reloj?

   A) 8 h 30' B) 7 h 30' C) 8 h
   D) 6 h 30' E) 7 h

6. ¿Qué hora es, si son los 5/7 del tiempo del día que falta por transcurrir?

   A) 7 h B) 8 h C) 6 h
   D) 9 h E) 10 h

7. ¿A qué hora entre las 10 y las 11 está el minutero exactamente a 6 minutos del horario?

   A) 10 h 47 min B) 10 h 52 min
   C) 10 h 53 min D) 10 h 46 min
   E) 10 h 48 min

8. ¿Qué ángulo forman entre sí las agujas del horario y minutero a las 9 h 10 min?

   A) 215° B) 137° C) 135°
   D) 143° E) 146°

9. ¿Qué ángulo forman las manecillas del horario y minutero a las 12 h 36 min?

   A) 196° B) 195° C) 193°
   D) 197° E) 198°

10. ¿Cuál es el menor ángulo que forman las manecillas del horario y minutero a las 10 h 28'?

A) 120° B) 135° C) 146°
D) 134° E) 147°

NIVEL 2

11. El reloj de la catedral en anunciar 5 h tarda 6 segundos. ¿Cuánto tardará en anunciar las 23 h?

A) 16 B) 17 C) 13
D) 14 E) 15

12. Un reloj de alarma da 145 "beep" en 20 s. ¿Cuánto se demorará para dar 37 "beep"?

A) 5 s B) 6 s C) 8 s
D) 7 s E) 4 s

13. En un reloj, ¿cuántas posiciones distintas hay en donde coinciden las manecillas del minutero y el horario?

A) 9 B) 13 C) 12
D) 10 E) 11

14. Un reloj se adelanta 4 min cada 3 horas. ¿A qué hora empezó a adelantarse si a las 11:10 p.m. señala 11:22 p.m.?

A) 2:20 p.m. B) 2:10 p.m. C) 2:18 p.m.
D) 2:16 p.m. E) 2:17 p.m.

15. Un reloj se atrasa 3 minutos cada 20 minutos. Si luego de 9 horas está marcando las 7:43 cuando en realidad son las $a:\overline{bc}$. Halla: $a + b + c$

A) 17 B) 14 C) 16
D) 13 E) 15

16. Un reloj se atrasa cada 15 minutos, 2 minutos. ¿Qué hora marcará dicho reloj cuando sean las 3:15 h, si hace 5 horas empezó a atrasarse?

A) 2:50 B) 2:55 C) 2:35
D) 2:45 E) 2:40

17. Si fuera 2 horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día 5/7 de lo que faltaría, si es que fuera 2 horas más temprano. ¿Qué hora es?

A) 5:30 p.m. B) 6:00 p.m. C) 7:00 a.m.
D) 12 m. E) 5:00 a.m.

18. ¿A qué hora de la mañana el tiempo que marca un reloj es igual a 5/4 de lo que falta para las doce del mediodía?

A) 10:20 B) 6:40 C) 8:15
D) 9:00 E) 11:45

19. ¿A qué hora, entre las 7 y las 8 de la noche, las agujas de un reloj forman un ángulo de 100° por segunda vez?

A) 7 h 56 $\frac{2}{11}$ min B) 7 h 58 $\frac{3}{11}$ min
C) 7 h 57 $\frac{3}{13}$ min D) 7 h 56 $\frac{4}{11}$ min
E) 7 h 56 $\frac{5}{11}$ min

20. ¿Cuál es el ángulo formado por las manecillas de un reloj a las 5:10 a.m.?

A) 80° B) 85° C) 95°
D) 90° E) 94,5°

NIVEL 3

21. Siendo las 5 p.m. un reloj empezó a adelantarse a razón de 8 minutos por hora. ¿Dentro de cuántas horas volverá a marcar la hora correcta?

A) 88 h B) 90 h C) 85 h
D) 80 h E) 180 h

22. ¿A qué hora, entre las 4 y las 5, las agujas de un reloj forman un ángulo cuya medida es 60° por primera vez?

A) 4 h 10 min B) 4 h 5 min
C) 4 h 13 min D) 4 h 10$\frac{10}{11}$ min
E) 4 h 12 $\frac{9}{11}$ min

23. ¿A qué hora entre las 4 y las 5 el ángulo interior será 1/5 del ángulo exterior, que forman tanto el horario como el minutero?

A) 4:02 min B) 4:10$\frac{10}{11}$ min
C) 4:11$\frac{2}{3}$ min D) 4:01 min
E) 4:10 min

24. ¿A qué hora después de las 4, el minutero adelanta al horario tanto como el horario adelanta a las 12?

A) 4:32 B) 4:34 C) 4:35
D) 4:48 E) 4:37

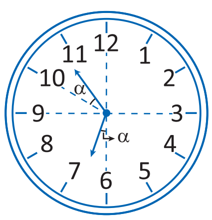
25 ¿Qué hora es?, si hace "a" horas el tiempo transcurrido era la mitad de lo que faltaba para acabar el día y dentro de "a" horas pasará lo contrario.

A) 8:00 B) 12:00 C) 20:00
D) 10:00 E) 15:00

26 Son más de las 6 sin ser las 8 de esta mañana; y hace 10 minutos los minutos que habían transcurrido desde las 6 era igual a 1/9 del tiempo que faltaría transcurrir hasta las 8 dentro de 10 minutos. ¿Qué hora es?

A) 6:20 p.m. B) 6:45 a.m. C) 6:45 p.m.
D) 7:20 a.m. E) 6:20 a.m.

27 ¿Qué hora marca el reloj de la figura?



A) 6 h 54 $\frac{16}{13}$ min B) 6 h 54 $\frac{2}{11}$ min

C) 6 h 54 $\frac{6}{11}$ min D) 6h 52 $\frac{3}{11}$ min

E) 6 h 56 $\frac{4}{11}$ min

28 Indica cuántos minutos después de la 1 p.m. forman un ángulo recto las manecillas de un reloj.

A) 260/11 B) 250/11 C) 270/11
D) 300/11 E) 240/11

29 Cuando son exactamente las 6:00 a.m., un reloj marca 5:40 a.m.; se sabe que el reloj siempre se retrasa 4 minutos cada 2 horas. ¿A qué hora marcó correctamente la hora por última vez?

UNI-2002 I

A) 4:00 p.m. B) 4:00 a.m. C) 8:00 a.m.
D) 8:00 p.m. E) 6:30 p.m.

30 El horario de un reloj mide 8,4 cm. ¿Cuál es la distancia recorrida por la punta de esta aguja en 1 hora? ($\pi = 22/7$)

A) 8 cm B) 8,2 cm C) 8,4 cm
D) 4,4 cm E) 9 cm

Claves

NIVEL 1	9. E	17. D	25. B
1. B	10. C	18. B	26. E
2. D	**NIVEL 2**	19. D	27. C
3. A	11. E	20. C	28. E
4. E	12. A	**NIVEL 3**	29. D
5. C	13. C	21. B	30. D
6. E	14. B	22. D	
7. E	15. D	23. B	
8. A	16. C	24. D	



Atención

Ejemplo:
Casos particulares

- Pedro es bombero y es valiente.
- Marcos es bombero y es valiente.
- Simón es bombero y es valiente.

Conclusión general
Todos los bomberos son valientes.

Recuerda

Generalmente es necesario y suficiente analizar tres casos particulares y sencillos, manteniendo la forma original en que se presenta el ejercicio.



Nota

Nos damos cuenta que la distribución de palitos en la torre obedece a una cierta formación, entonces aplicamos inducción, analizando los tres casos más simples que se pueden dar.

Observación

En este tipo de problemas se debe tener en cuenta las principales propiedades básicas de la adición, sustracción, multiplicación, división, etc. Las cuales ayudarán a verificar los casos particulares.

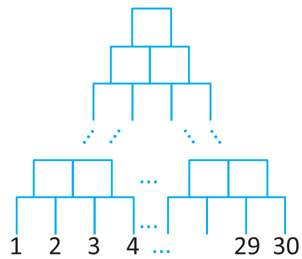
Inducción - Deducción

RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Consiste en analizar casos particulares, es decir, realizar experiencias sencillas, pero con las mismas características del problema original para conseguir resultados que al ser relacionados nos permitan llegar a una conclusión con amplia probabilidad de certeza que lo llamaremos caso general.

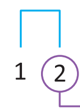
Casos particulares → Inducción → Caso general

Ejemplo:
Calcula el número total de palitos en la figura:



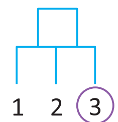
Resolución:

Caso 1:



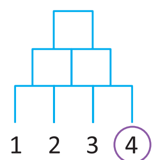
$3 = 2^2 - 1$

Caso 2:



$8 = 3^2 - 1$

Caso 3:



$15 = 4^2 - 1$

∴ El número total de palitos será: $30^2 - 1 = 899$

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Es aquel tipo de razonamiento que va de lo general a lo particular. Se parte de una afirmación general (que ya ha sido demostrada), la cual se aplica a casos particulares.

Caso general → Deducción → Casos particulares

Ejemplo:

- Se sabe que todos los alumnos de la UNMSM son inteligentes.
- Se sabe también que Eder es alumno de la UNMSM.

Luego, se deduce que Eder es inteligente.

Problemas resueltos

1 Identifica la suma de cifras del resultado, al efectuar la expresión siguiente:

$$\underbrace{(666...66)}_{66\text{ cifras}}{}^2$$

Resolución:

			Suma de cifras
$1.^{er}$ caso:	$6^2 = 36$	$\longrightarrow$	$9 = 9(1)$
$2.^{\circ}$ caso:	$66^2 = 4356$	$\longrightarrow$	$18 = 9(2)$
$3.^{er}$ caso:	$666^2 = 443\,556$	$\longrightarrow$	$27 = 9(3)$

$\therefore$ La suma de cifras del resultado es: $9(66) = 594$

2 Efectúa: $\sqrt{200 \times 201 \times 202 \times 203 + 1} - 40\,194$

Resolución:

Se observa que en el radical aparece el producto de 4 números consecutivos. Analizamos los casos más simples.

Caso 1: $\sqrt{\textcircled{1} \times 2 \times 3 \times \textcircled{4} + 1} = 5 \Rightarrow 1 \times 4 + 1$

Caso 2: $\sqrt{\textcircled{2} \times 3 \times 4 \times \textcircled{5} + 1} = 11 \Rightarrow 2 \times 5 + 1$

Caso 3: $\sqrt{\textcircled{3} \times 4 \times 5 \times \textcircled{6} + 1} = 19 \Rightarrow 3 \times 6 + 1$

Luego, solo basta con multiplicar el mayor y menor de los números y sumarle 1:

En el problema:

$200 \times 203 + 1 - 40\,194$

$40\,601 - 40\,194 = 407$

3 Si: $\overline{SIETE} + \overline{TRES} = 100\,000$

Halla: $\overline{SEIS}$, además $I = E$ y $T = R$.

Resolución:

Del dato:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ S\,I\,E\,T\,E\; + \\ T\,R\,E\,S \\ \hline 1\,0\,0\,0\,0\,0 \end{array}$$

De las unidades: $E + S = 10$ ... (I)

De las decenas: $T + E = 9$ ... (II)

De las centenas: $E + R = 9$ ... (III)

De los millares: $I + T = 9$ ... (IV)

$S + 1 = 10 \Rightarrow S = 9$

En (I): $E = 1 \Rightarrow I = 1$

En (II): $T = 8 \Rightarrow R = 8$

$\therefore \overline{SEIS} = 9119$

4 Según el esquema, ¿de cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "Esperanza"?

E
S S
P P P
E E E E
R R R R R
A A A A A A
N N N N N N N
Z Z Z Z Z Z Z Z
A A A A A A A A A

Resolución:

Sea "ES" la palabra a leer (2 letras):

E
S S

2 maneras $= 2^1 = 2^{2-1}$

Sea "ESP" la palabra a leer (3 letras):

E
S S
P P P

4 maneras $= 2^2 = 2^{3-1}$

Sea "ESPE" la palabra a leer (4 letras):

E
S S
P P P
E E E E

8 maneras $= 2^3 = 2^{4-1}$

En el problema:

Esperanza tiene 9 letras, entonces:

$\text{Total}_{\text{maneras}} = 2^{9-1} = 2^8 = 256$

5 Si: $(a + b + c)2 = \overline{a25}$
calcula: $M = \overline{ab3} + \overline{c2b} + \overline{4ac} + \overline{bca}$

Resolución:

Observación: todo número que termina en 5 al elevarlo al cuadrado, su resultado termina en 25.
Ejemplo:
$35^2 = 12\underline{25}$
$45^2 = 20\underline{25}$
$65^2 = 42\underline{25}$

En el problema:
$(a + b + c)^2 = \overline{a25}$
$(a + b + c) = 25 \lor (a + b + c) = 15$

- Si $a + b + c = 25 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 625$
  $\Rightarrow a = 6$ y $b + c = 19$ (no puede ser)
- Si $a + b + c = 15 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 225$
  $\Rightarrow a = 2$ y $b + c = 13$

Luego: $M = \overline{ab3} + \overline{c2b} + \overline{4ac} + \overline{bca}$
$\therefore M = 2088$

6 Calcula la suma de cifras del resultado de:
$$P = 99 \times \underbrace{888 \ldots 88}_{102 \text{ cifras}}$$

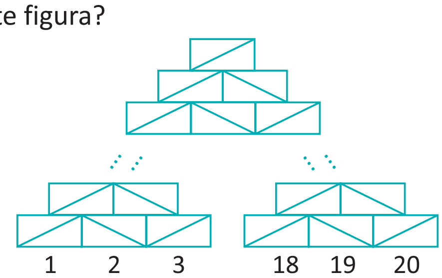
Resolución:

Aplicando inducción:

			Suma de cifras
Caso 1:	99×88	$= 8712$	$\Rightarrow 18 = 9(2)$
Caso 2:	99×888	$= 87\,912$	$\Rightarrow 27 = 9(3)$
Caso 3:	99×8888	$= 879\,912$	$\Rightarrow 36 = 9(4)$

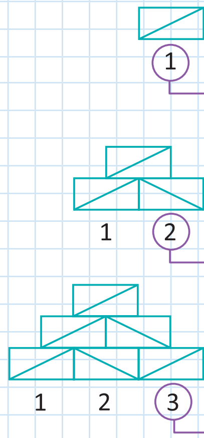
En el problema:
$$P = 99 \times \underbrace{888 \ldots 88}_{102 \text{ cifras}}$$
$\therefore$ La suma de cifras será: $9(102) = 918$

7 ¿Cuántos triángulos se pueden contar en la siguiente figura?



Resolución:

\# de triángulos



$2 = 2 + 0$
$= 1 \times 2 + \dfrac{0 \times 1}{2}$

$7 = 6 + 1$
$= 2 \times 3 + \dfrac{1 \times 2}{2}$

$15 = 12 + 3$
$= 3 \times 4 + \dfrac{2 \times 3}{2}$

$\therefore$ El número total de triángulos será:

$$20 \times 21 + \frac{19 \times 20}{2} = 610$$

8 Calcula la suma de cifras del resultado de:
$$E = [\underbrace{(a+3)(a+3) \ldots (a+3)}_{100 \text{ cifras}} - \underbrace{(a-3)(a-3) \ldots (a-3)(a-5)}_{100 \text{ cifras}}]^2$$

Resolución:

$(a + 3) - (a - 5) = 8$
$(a + 3) - (a - 3) = 6$

Luego:
$$E = (\underbrace{666 \ldots 6668}_{100 \text{ cifras}})^2$$

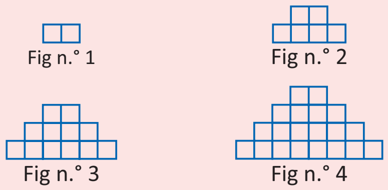
Aplicando inducción:

		Suma de cifras
$(68)^2$	$= 4624$	$\Rightarrow 16 = 6(2) + 4$
$(668)^2$	$= 446\,224$	$\Rightarrow 22 = 6(3) + 4$
$(6668)^2$	$= 44\,462\,224$	$\Rightarrow 28 = 6(4) + 4$

$\therefore$ Suma de cifras $= 6(100) + 4 = 604$

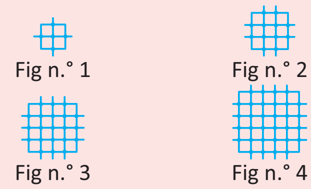
Actividades de razonamiento

1. ¿Cuántos cuadrados simples hay en la figura n.° 18?



A) 283 B) 315 C) 330 D) 342 E) 380

2. ¿Cuántos puntos de intersección se pueden contar en la figura n.° 20?



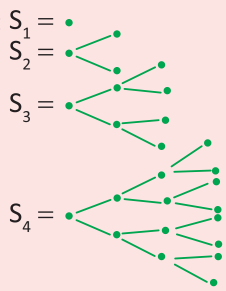
A) 460 B) 420 C) 480 D) 470 E) 450

3. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra INDUCCIÓN?

I
N N
D D D
U U U U
C C C C C
C C C C C C
I I I I I I I
O O O O O O O O
N N N N N N N N N

A) 128 B) 512 C) 412 D) 256 E) 328

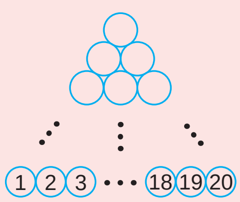
4. Si:



¿Cuántas bolitas habrá en S_{12}?

A) 4095 B) 2048 C) 4000 D) 1024 E) 3125

5. Halla el número total de puntos de contacto, en:



A) 520 B) 670 C) 570 D) 810 E) 940

6. Calcula L, si:

$$L = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + ... + 4444}{1 + 3 + 5 + 7 + ... + 4443}$$

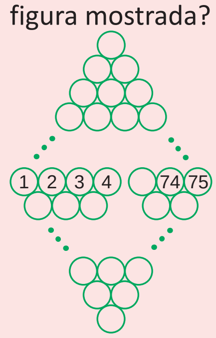
A) $\frac{4444}{4443}$ B) $\frac{2223}{2222}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2222}{2221}$ E) 1

7. Calcula la suma de términos de la fila 23(F_{23}):

$F_1 \longrightarrow$ 1
$F_2 \longrightarrow$ 3 5
$F_3 \longrightarrow$ 7 9 11
$F_4 \longrightarrow$ 13 15 17 19
⋰ ⋮ ⋱

A) 13 243 B) 16 343 C) 12 167
D) 15 342 E) 2654

8. ¿Cuántas bolitas se pueden contar en total en la figura mostrada?



A) 9270 B) 3640 C) 5625
D) 6255 E) 5260

9. Calcula la suma de todos los términos del siguiente arreglo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 20 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & \cdots & 22 \\ 6 & 8 & 10 & 12 & \cdots & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 20 & 22 & 24 & 26 & \cdots & 38 \end{bmatrix}$$

A) 1000 B) 5000 C) 500 D) 2000 E) 200

10. En el siguiente arreglo, calcula F_{100}:

F_1: 3
F_2: 3 + 5
F_3: 3 + 5 + 7
F_4: 3 + 5 + 7 + 9

A) 3900 B) 7890 C) 10 200 D) 7900 E) 9800

11. Calcula la suma de cifras del resultado de la siguiente expresión:

$$S = (\underbrace{111...11}_{100\text{ cifras}} + \underbrace{222...22}_{100\text{ cifras}} + \underbrace{333...33}_{100\text{ cifras}})^2$$

A) 100 B) 870 C) 900 D) 810 E) 800

12. Halla la última cifra del resultado de:

$M = 1965^{32} + 1969^{28} + 1967^{30}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. Halla la suma de cifras del siguiente producto:

$(10^{15} - 1)^2(10^{15} + 1)^2$

A) 270 B) 260 C) 261 D) 265 E) 320

14. En el siguiente triángulo numérico, calcula la suma de los elementos de la fila número 20(F_{20}):

$F_1 \rightarrow$					1					
$F_2 \rightarrow$				1		1				
$F_3 \rightarrow$			2		1		2			
$F_4 \rightarrow$		3		3		3		3		
$F_5 \rightarrow$	4		6		6		6		4	
$F_6 \rightarrow$	5	10		10		10		10		5
	⋰									⋱

A) 3000 B) 3136 C) 4650 D) 3116 E) 5000

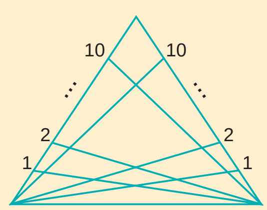
Claves

1. D
2. C
3. D
4. A
5. C
6. B
7. C
8. C
9. D
10. C
11. C
12. E
13. A
14. D

Reto

Halla el número total de triángulos, en:



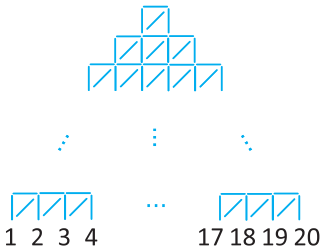


Rpta.: 1331

Refuerza practicando

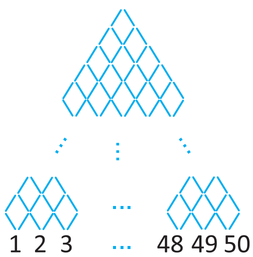
NIVEL I

1. ¿Cuántos palitos se emplearon en total para formar la siguiente figura?



A) 320 B) 225 C) 310 D) 750 E) 250

2. Halla el número total de palitos empleados en la siguiente figura:



A) 2650 B) 3180 C) 300 D) 2450 E) 2520

3. Si la secuencia continúa, halla el número de rombos existentes en la figura 50:

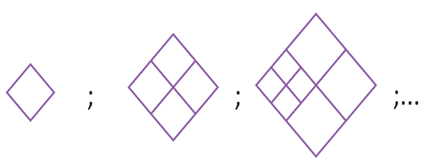


Figura 1 Figura 2 Figura 3

A) 190 B) 180 C) 197 D) 205 E) 213

4. Un vendedor ofrece sus productos a precios establecidos por kilogramo con un extraño criterio, así por ejemplo:

Ají	→	S/.6
Papa	→	S/.10
Arroz	→	S/.15
Camote	→	S/.21

¿Cuál es el precio del kilogramo de pescado en dicha tienda?

A) S/.28 B) S/.30 C) S/.25 D) S/.18 E) S/.24

5. Si: $4 \times N = ...244$
$7 \times N = ...927$
halla las tres últimas cifras de operar $10 \times N$.

A) 610 B) 320 C) 410 D) 330 E) 230

6. Calcula la suma de cifras del resultado de A, si:

$$A = (\underbrace{999...9995}_{101 \text{ cifras}})^2$$

A) 900 B) 925 C) 625 D) 905 E) 907

7) Calcula la suma de cifras del resultado de:

$E = (\underbrace{999...992}_{41\text{ cifras}}) \times (\underbrace{999...998}_{41\text{ cifras}})$

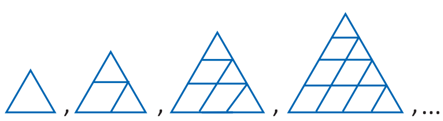
A) 324 B) 256 C) 412 D) 366 E) 367

8) Calcula la suma de cifras del resultado de:

$$E = (\underbrace{3333...33}_{33\text{ cifras}})^2$$

A) 286 B) 292 C) 295 D) 297 E) 316

9) Calcula el número de triángulos en F_{40}:



F_1, F_2, F_3, F_4, ...

A) 420 B) 800 C) 820
D) 1020 E) 960

10) Calcula:

$S = \dfrac{\sqrt[4]{876\,555\,678 - 753\,101\,357}}{\sqrt{34\,343 - 23\,232}}$

A) 1 B) 11 C) 0
D) $\sqrt{111}$ E) $\sqrt{11\,111}$

NIVEL 2

11) Halla la suma de cifras del resultado de sumar todos los términos del siguiente arreglo:

$F_1 \longrightarrow 5$
$F_2 \longrightarrow 5\,5$
$F_3 \longrightarrow 5\,5\,5$
$F_4 \longrightarrow 5\,5\,5\,5$
$F_{19} \longrightarrow 5\,5\,5 \ldots 5$
$F_{20} \longrightarrow 5\,5\,5 \ldots 5\,5$

A) 12 B) 6 C) 14 D) 17 E) 8

12) Halla la suma de todos los números que componen la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & 13 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \ldots & 19 \end{bmatrix}$$

A) 788 B) 900 C) 1000
D) 2000 E) 2300

13) Calcula la suma de los coeficientes del desarrollo de $(a + b)^{20}$.

A) 2^{18} B) 2^{30} C) 2^{24} D) 2^{20} E) 2^{14}

14 Calcula la suma de cifras del resultado de la siguiente operación:

$$\underbrace{9999...97}_{101\text{ cifras}} \times \underbrace{999...993}_{101\text{ cifras}}$$

A) 900 B) 905 C) 921 D) 907 E) 903

15 En el siguiente arreglo, calcula F_{50}:

$F_1 \longrightarrow 3$
$F_2 \longrightarrow 3 + 5$
$F_3 \longrightarrow 3 + 5 + 7$
$F_4 \longrightarrow 3 + 5 + 7 + 9$

A) 2500 B) 2600 C) 2700
D) 2400 E) 3000

16 La siguiente expresión:

$$E = \underbrace{111...11}_{2\mathbf{a}\text{ cifras}} - \underbrace{222...22}_{\mathbf{a}\text{ cifras}}$$

equivale a:

A) $(\underbrace{333...33}_{(a+1)\text{ cifras}})^2$ B) $(\underbrace{333...33}_{2a\text{ cifras}})^2$

C) $(\underbrace{333...33}_{a\text{ cifras}})^2$ D) $(\underbrace{333...33}_{3a\text{ cifras}})^2$

E) $(\underbrace{333...33}_{(a+2)\text{ cifras}})^2$

17 Resuelve:

$$\frac{\sqrt{111\,110\,888\,889}}{444\,444} + \frac{1}{4}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) $\sqrt{11111}/4$ E) 3

18 Halla el resultado final de la expresión M, si:

$$M = \frac{13}{34} + \frac{1313}{3434} + \frac{131313}{343434} + ... + \frac{\overbrace{131313...1313}^{136\text{ cifras}}}{\underbrace{343434...3434}_{136\text{ cifras}}}$$

A) 26 B) 32 C) 28 D) 30 E) 24

19 Calcula la suma de cifras del producto P, si:

$$P = \underbrace{2222...22}_{103\text{ cifras}} \times \underbrace{9999...998}_{104\text{ cifras}}$$

A) 760 B) 730 C) 720 D) 740 E) 800

20 Calcula el valor de:

$$E = \sqrt[8]{1 + 2047(2^{11}+1)(2^{22}+1)}$$

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}^{11}$ D) $\sqrt{2}^{22}$ E) $\sqrt[8]{2}$

NIVEL 3

21. En la siguiente secuencia, halla f(12):

$f(1) = 1 + 1 \div 1$

$f(2) = 4 - 3 \times 4$

$f(3) = 10 + 6 \div 9$

$f(4) = 20 - 10 \times 16$

A) 42 714 B) 43 472 C) 41 784
D) 41 184 E) −10 868

22. Con 3003 alumnos se desea hacer una formación triangular de manera que la primera fila tenga un alumno, la segunda dos, la tercera tres y así sucesivamente. Entonces la suma de los dígitos del número de filas que se formarían es:

UNMSM-2004 II

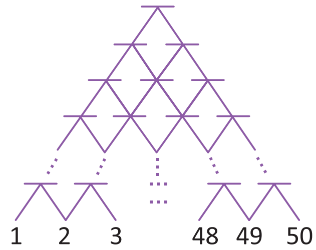
A) 4 B) 8 C) 14
D) 9 E) 7

23. Halla la última cifra de P, si:

$$P = (3^{2004} + 2)(3^{2003} + 2)(3^{2002} + 2)(3^{2001} + 2)(3^{2000} + 2) \dots (3^{100} + 2)$$

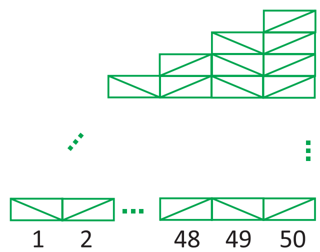
A) 5 B) 7 C) 9
D) 1 E) 3

24. ¿Cuántos palitos se han utilizado para la construcción del siguiente castillo?



A) 3625 B) 3675 C) 4290
D) 3765 E) 3756

25. ¿Cuántos triángulos hay en total en la siguiente figura?



A) 3775 B) 2105 C) 5050
D) 2500 E) 1275

26. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra ESFUÉRZATE en el arreglo mostrado?

E
S S
F F F
U U U U
E E E E E
R R R R R R
Z Z Z Z Z Z Z
A A A A A A A A
T T T T T T T T T
E E E E E E E E E E

A) 512 B) 1024 C) 256 D) 1020 E) 511

27 Calcula la suma de cifras del resultado final de:

$$\underbrace{8 + 98 + 998 + 9998 + \ldots}_{45 \text{ sumandos}}$$

A) 44 B) 45 C) 46
D) 47 E) 48

28 ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra EXPLOTACIÓN usando letras contiguas?

```
                            N
                         O  N
                      I  O  N
                   C  I  O  N
                A  C  I  O  N
             T  A  C  I  O  N
          O  T  A  C  I  O  N
       L  O  T  A  C  I  O  N
    P  L  O  T  A  C  I  O  N
 X  P  L  O  T  A  C  I  O  N
E  X  P  L  O  T  A  C  I  O  N
```

A) 1024 B) 2048 C) 1023 D) 2047 E) 512

29 ¿Cuántas bolitas habrá en la figura 20 (F_{20})?

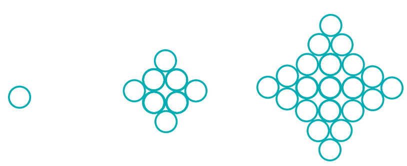


Figura 1 Figura 2 Figura 3

A) 1200 B) 960 C) 800
D) 1160 E) 820

30 En el arreglo mostrado, ¿de cuántas formas diferentes se puede leer la palabra ANUAL CIENCIAS?

```
      A
     N N
    U U U
   A A A A
  L L L L L
 C C C C C C
I I I I I I I
 E E E E E E
  N N N N N
   C C C C
    I I I
     A A
      S
```

A) 462 B) 252 C) 924
D) 210 E) 1024

Claves

NIVEL 1			
1. C	9. C	17. A	25. A
2. A	10. A	18. A	26. A
3. C	**NIVEL 2**	19. B	27. B
4. A	11. B	20. C	28. A
5. A	12. C	**NIVEL 3**	29. D
6. E	13. D	21. E	30. C
7. E	14. E	22. C	
8. D	15. B	23. A	
	16. C	24. B	

Cuadrados mágicos

DEFINICIÓN

Es una distribución cuadrada de números en la que la suma de los números en cada fila, columna o diagonal es la misma.

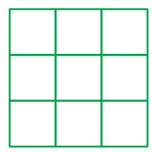
Orden:número de casillas por lado

14	19	12
13	15	17
18	11	16

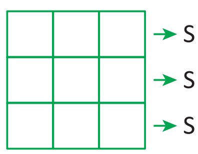
→ 45: constante mágica o suma mágica

↓ 45 ↘ 45

Ejemplo:
Si el siguiente cuadrado mágico se completa con los números del 1 al 9, ¿cuál es el valor de la suma mágica?



Resolución:



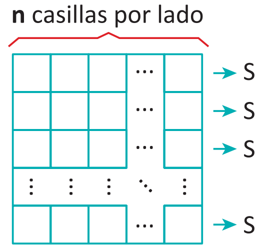
Todos los números suman 3S.

$3S = 1 + 2 + 3 + ... + 9$

$3S = \dfrac{9 \times 10}{2} = 45$

$\Rightarrow S = 15$

En general: sea un cuadrado de orden **n** que se completa con los números: $1; 2; 3; ...; n^2$



Todos los números suman nS.

$nS = 1 + 2 + 3 + ... + n^2$

$nS = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$

$\Rightarrow S = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$

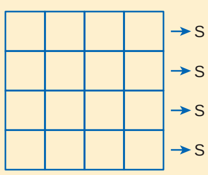


Recuerda

Se denomina orden al número de casillas por lado. Por ejemplo: el cuadrado mágico que se muestra es de orden 3×3 o simplemente de orden 3.

Observación

De igual manera si se quiere hallar el valor de la constante mágica en un cuadrado mágico de orden 4, que se completa con los números enteros del 1 al 16.



$4S = 1 + 2 + 3 + ... + 16$

$4S = \dfrac{16 \times 17}{2}$

$S = 34$



Importante

Para reconocer el valor de la constante mágica que se ha completado con los n^2 primeros números enteros positivos, se puede utilizar la siguiente expresión:

$\dfrac{n(n^2+1)}{2}$

donde "n" representa el orden del cuadrado mágico.

CONSTRUCCIÓN DE CUADRADOS MÁGICOS

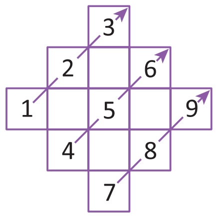
Método de Bachet (cuadrados mágicos de orden impar)

1.er Paso: construye casillas en forma de torre sobre los lados del cuadrado mágico.
2.° Paso: escribe el 1 en la casilla lateral izquierda y completa los números en forma diagonal hacia arriba.

3.er Paso: los números fuera del cuadrado ingresarán en forma simétrica en el lado opuesto.

Ejemplo:

Distribuir los números del 1 al 9 en un cuadrado mágico.



2	7	6
9	5	1
4	3	8

Método de las x (cuadrados mágicos de orden múltiplo de 4)

1.er Paso: ubique los números desde la casilla superior izquierda y en orden ascendente.

2.° Paso: divide en sub cuadrados 4×4 y traza una equis (X) en cada sub cuadrado.

3.er Paso: los números tocados por las equis se intercambian en forma simétrica con respecto al centro del cuadrado.

Ejemplo:

Distribuye los números del 1 al 16 en un cuadrado mágico:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

PROPIEDADES DE LOS CUADRADOS MÁGICOS

De orden 3

- En un cuadrado mágico de orden 3 la suma mágica o constante mágica es tres veces el término central.

	e	

→ S

$S = 3e$

- El número ubicado en cada vértice de un cuadrado mágico de orden 3 es la semisuma de los dos números que están en contacto con su vértice opuesto.

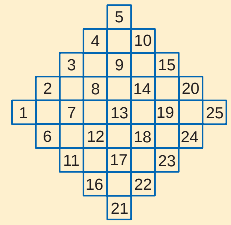
a	b	c
d	e	f
g	h	i

$a = \dfrac{h+f}{2}$ $\quad g = \dfrac{b+f}{2}$

$c = \dfrac{d+h}{2}$ $\quad i = \dfrac{b+d}{2}$

Atención

Distribuye los números del 1 al 25.



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23



Atención

Distribuye los números del 1 al 64.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

Nota

Sabemos que:

$S = \dfrac{\text{Suma total}}{3}$

También:

$e = \dfrac{S}{3}$

Luego:

$e = \dfrac{\text{Suma total}}{9}$

Recuerda

En todo cuadrado mágico de orden 3 el número que se ubica en la casilla central es la semisuma de los números ubicados en dos casillas simétricas respecto a dicha casilla central.

a	b	c	→ S
d	e	f	→ S
g	h	i	→ S

$e = \frac{a+i}{2}$ $e = \frac{g+c}{2}$

$e = \frac{b+h}{2}$ $e = \frac{d+f}{2}$

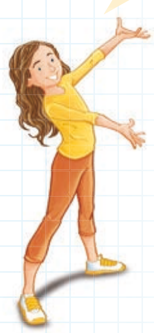


Recuerda

En todo cuadrado mágico de orden 4 la suma de los números que se ubican en las casillas centrales es igual a la constante mágica.

				→ S
	a	b		→ S
	c	d		→ S
				→ S

$S = a + b + c + d$



- En todo cuadrado mágico de orden 3, el menor y el mayor de los números se encuentran en los lados laterales no esquineros del cuadrado.

	2b		
2a			
		a+b	→ Aquí no se ubica el mayor ni el menor.

De orden 4

- En un cuadrado mágico de orden 4, los números ubicados en los vértices es igual a la suma mágica.

x			y	→ S
				→ S
				→ S
z			w	→ S

$S = x + y + z + w$

Veamos algunos ejemplos:

1. En el siguiente cuadrado mágico, distribuye los números del 1 al 9. Halla el valor de (a + b).

	9	
7		b
	a	

Resolución:

La constante mágica es "S":

$3S = 1 + 2 + 3 + ... + 9$

$3S = 45$

$S = 15$

Entonces, el término central es:

$e = \frac{S}{3} = \frac{15}{3} = 5$

Luego: $7 + 5 + b = 15$

$12 + b = 15$

$b = 3$

También: $9 + 5 + a = 15$

$14 + a = 15$

$a = 1$

$\therefore\ a + b = 3 + 1 = 4$

2. Con los 16 primeros números impares se forma un cuadrado mágico. Determina la suma de los números ubicados en la casilla sombreada.

	■	■	
	■	■	

Resolución:

La suma de los números ubicados en la casilla sombreada es igual a la constante mágica.

Los números a distribuir son:

1; 3; 5; 7; ...; 31

Luego: $4S = 1 + 3 + 5 + ... + 31$

$4S = 16^2$

$4S = 256$

$\therefore S = 64$

Problemas resueltos

1 En el siguiente cuadrado mágico, halla el valor de a + b + c.

1	8	6
x	b	o
a	c	9

Resolución:

La constante mágica es: $S = 1 + 8 + 6$

$S = 15$

Luego: $b = \frac{S}{3} = \frac{15}{3} \Rightarrow b = 5$

También: $S = a + c + 9$

$15 = a + c + 9 \Rightarrow a + c = 6$

$\therefore\ a + b + c = 6 + 5 = 11$

2 Halla el valor de A + B + C, en el siguiente cuadrado mágico cuyos números componentes son los 9 primeros números impares.

A		
	B	
		C

Resolución:

Los números son: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17

Lo que nos piden: A + B + C es igual a la constante mágica "S".

Luego: $3S = 1 + 3 + 5 + ... + 17$

$3S = 9^2$

$3S = 81 \Rightarrow S = 27$

$\therefore\ A + B + C = 27$

3 Determina el valor de: A + B + C + D, si el siguiente gráfico es un cuadrado mágico de orden 3.

3/4	B	1
C		D
1/4	A	1/2

Resolución:

Por propiedad: $\frac{A + C}{2} = 1 \Rightarrow A + C = 2$

También: $\frac{B + D}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow B + D = \frac{1}{2}$

Luego: $A + B + C + D = \frac{5}{2}$

4 En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los 9 primeros números impares, calcula el valor de c, si a + b = 14.

a		b
	c	

Resolución:

Los números son: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17

$3S = 1 + 3 + 5 + ... + 17$

$3S = 81 \Rightarrow S = 27$

Luego, el término central es: $e = \frac{S}{3} = 9$

a		b
	9	
	c	

Del gráfico:

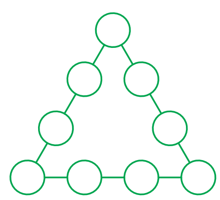
$a + b = 9 + c$

$14 = 9 + c$

$c = 5$

$\therefore\ c = 5$

5 Distribuye los 9 primeros números naturales en el triángulo mostrado, de tal modo que la suma de cada lado sea la misma. Da como respuesta la mayor suma.

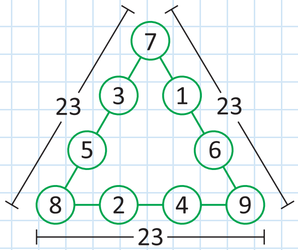


Resolución:

Los números a distribuir son: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9

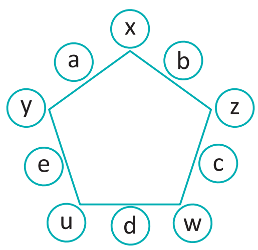
Como nos piden la mayor suma en los vértices se debe ubicar los números mayores, es decir, 7; 8 y 9.

Luego la distribución es la siguiente:



∴ La suma máxima es 23.

6 Halla el valor de $x + y + z + w + u$, si se deben ubicar los números del 1 al 10 en el siguiente gráfico, de tal manera que la suma de los números ubicados en cada lado sea 16.



Resolución:

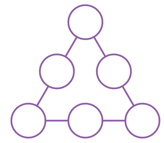
$$\begin{aligned} y + a + x &= 16 \\ x + b + z &= 16 \\ z + c + w &= 16 \quad (+) \\ w + d + u &= 16 \\ u + e + y &= 16 \end{aligned}$$

$$\underbrace{y+a+x+b+z+c+w+d+u+e}_{1+2+3+...+10} + x+y+z+w+u = 80$$

$$55 + (x + y + z + w + u) = 80$$

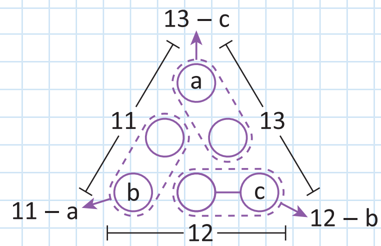
$$\therefore\ x + y + z + w + u = 25$$

7 Distribuye los números 1; 2; 3; 4; 5; 6 en los círculos mostrados, de tal manera que la suma de los números en los lados del triángulo sean 11; 12 y 13. Da como respuesta la suma de los números que se ubican en los vértices del triángulo.



Resolución:

Nos piden calcular la suma de los números que se ubican en los vértices: $(a + b + c)$



Del gráfico:

$$(11 - a) + (12 - b) + (13 - c) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$36 - (a + b + c) = 21$$

$$\therefore\ (a + b + c) = 15$$

8 Halla el valor de $x + y$ en el siguiente cuadrado mágico, cuyos componentes son los 9 primeros números pares.

3y		
		x
y	3x	

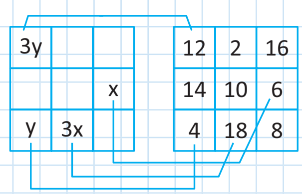
Resolución:

Los números a distribuir son: 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16 y 18.

Aplicando el método de Bachet:

4	14	12
18	10	2
8	6	16

Giramos el cuadrado mágico 90° en sentido antihorario y luego comparamos con el gráfico original:



Finalmente: $x = 6$ e $y = 4$

$\therefore\ x + y = 10$

Actividades de razonamiento

1. En el siguiente cuadrado mágico, se distribuyen los 9 primeros números pares. Calcula el valor de x + y + z.

		z
	y	
x		

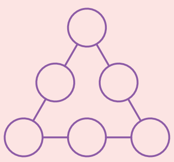
A) 27 B) 30 C) 33 D) 36 E) 42

2. Halla el valor de x + y + z + w, si el siguiente gráfico es un cuadrado mágico.

17	z	71
y		w
47	x	101

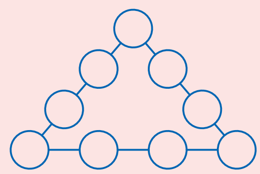
A) 234 B) 235 C) 236 D) 237 E) 240

3. Distribuye los números del 5 al 10 en los círculos, de tal modo que la suma de los números en los lados del triángulo sean: 20; 21 y 22. Da como respuesta la suma de los números que se ubican en los vértices del triángulo.



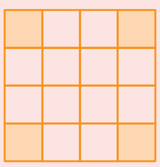
A) 18 B) 20 C) 15 D) 23 E) 17

4. En el gráfico, distribuye los números del 5 al 13, de tal manera que la suma de cada lado del triángulo sea la misma. Da como respuesta la mayor suma.



A) 35 B) 37 C) 38 D) 36 E) 39

5. En el cuadrado mágico que se muestra se distribuyen los 16 primeros números pares. Determina la suma de los números ubicados en las casillas sombreadas.



A) 65 B) 69 C) 66 D) 68 E) 70

6. En el gráfico se muestra un cuadrado mágico de orden 3. Halla el valor de x.

5		x
	e	a
	7	17

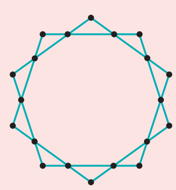
A) 15 B) 18 C) 13 D) 23 E) 21

7. El siguiente cuadrado mágico está compuesto por los 9 primeros múltiplos de 3, excepto 0. Calcula z, si x + y = 42.

	z	
x		y

A) 21 B) 24 C) 18 D) 12 E) 27

8. Ubica en los puntos los números consecutivos del 1 al 20 de manera que cada cuatro círculos lineales sumen S. Halla S.



A) 42 B) 44 C) 40 D) 36 E) 30

9. En el siguiente cuadrado mágico, distribuye los números impares del 1 al 17. Calcula el valor de: m × n

	m	
13	e	n
	1	

A) 85 B) 75 C) 105 D) 65 E) 55

10. En el cuadrado mágico que se muestra en la figura, halla el valor de: p + q + r

36		p
42	q	r
12	54	24

A) 108 B) 112 C) 96 D) 116 E) 106

11. En el siguiente cuadrado mágico se deben distribuir los números impares del 1 al 31. Da como respuesta el valor de: M + N + P + Q

25			
P	21	13	27
5	M	11	29
Q			N

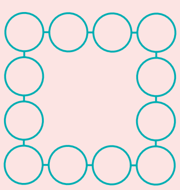
A) 25 B) 60 C) 26 D) 28 E) 45

12. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla el valor de x + y + z.

2x + 2	x	z + 1
z − 2	x + 2	5x − 6
y − 1	2z + 1	x − 1

A) 8 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

13. En el gráfico, distribuye los números del 2 al 13, de modo que la suma de los números que se ubican en cada lado sea 26. Da como respuesta la suma de los números que no se ubican en los vértices.



A) 74 B) 84 C) 76 D) 96 E) 108

14. El gráfico que se muestra corresponde a un cuadrado mágico de orden 4, en el cual se distribuyen los números pares del 2 al 32. Halla el valor de A × B.

26		B	
	20	12	30
4	A	14	28

A) 523 B) 532 C) 518 D) 528 E) 508

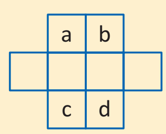
Claves

1. B
2. C
3. A
4. E
5. D
6. C
7. E
8. A
9. A
10. C
11. B
12. D
13. C
14. D

Reto



En el siguiente esquema coloca los números: 2; 4; 6; ...; 16, de tal forma que no haya dos números pares consecutivos en casilleros contiguos. Da como respuesta el valor de: a + b + c + d



Rpta.: 36

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. En el siguiente cuadrado mágico, halla el valor de a + b + c.

6	x	a
8	b	c
1	10	4

A) 15 B) 16 C) 14 D) 12 E) 18

2. Halla el valor de x + y + z, en el siguiente cuadrado mágico:

2	12	10
x	y	0
z	a	14

A) 27 B) 40 C) 38 D) 30 E) 32

3. En el siguiente cuadrado mágico, halla el valor de a + b + c.

3	13	11
17	a	b
7	y	c

A) 25 B) 18 C) 15 D) 22 E) 20

4. Determina el valor de: x + y + w + z, si el siguiente gráfico es un cuadrado mágico de orden 3:

1	x	3
z		y
2	w	4

A) 10 B) 9 C) 8 D) 12 E) 13

5. Determina el valor de: x + y – w – z

7	y	12
x		w
3	z	8

A) 4 B) 8 C) 2 D) 5 E) 6

6. Determina el valor de: A + B + C + D, si el siguiente gráfico es un cuadrado mágico de orden 3.

7/4	B	3/2
A		C
1/2	D	1/4

A) 7 B) 4 C) 6 D) 10 E) 8

7. En el siguiente cuadrado mágico, se distribuyen los 9 primeros números naturales. Calcula el valor de a + b + c.

a		
	b	
		c

A) 18 B) 20 C) 22 D) 15 E) 19

8) En el siguiente cuadrado mágico, se distribuyen los 9 primeros números impares. Calcula el valor de x + y + z.

x	y	z

A) 23 B) 27 C) 31 D) 25 E) 29

9) En el siguiente cuadrado mágico, se distribuyen los 9 primeros números múltiplos de 3, sin contar el 0. Calcula a + b + c.

	a	
	b	
	c	

A) 43 B) 40 C) 42 D) 38 E) 45

10) En el siguiente cuadrado mágico, se distribuyen los números naturales del 6 al 14. Calcula el valor de x + y + z.

		z
	y	
x		

A) 35 B) 32 C) 30 D) 33 E) 25

NIVEL 2

11) El siguiente cuadrado mágico está compuesto por los 9 primeros números naturales. Calcula el valor de x, si y + z = 8.

y		z
	x	

A) 7 B) 6 C) 4 D) 5 E) 3

12) En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los 9 primeros números pares, excepto el 0, calcula el valor de c, si a + b = 12.

a		
		c
b		

A) 10 B) 2 C) 6 D) 8 E) 4

13) En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los 9 primeros múltiplos de 4, excepto 0, calcula el valor de x, si y + z = 48.

	x	
y		z

A) 23 B) 25 C) 30 D) 32 E) 28

14. En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los 9 primeros múltiplos de 3, excepto 0, calcula m + n.

	m	
27	e	n
	9	

A) 24 B) 27 C) 30 D) 25 E) 22

15. En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los números pares del 6 al 22, calcula a + b.

	18	
b	e	6
	a	

A) 36 B) 40 C) 32 D) 30 E) 38

16. En el siguiente cuadrado mágico que se forma al distribuir los números impares del 11 al 27, calcula m – n.

	23	
27	e	n
	m	

A) 8 B) 4 C) 5 D) 6 E) 3

17. El gráfico que se muestra, representa un cuadrado mágico. Halla el valor de x + y + z.

3		z
17	x	y
7	5	15

A) 16 B) 15 C) 21 D) 12 E) 18

18. El gráfico que se muestra, representa un cuadrado mágico. Halla el valor de a + b + c.

4	14	12
c	b	2
a		16

A) 28 B) 30 C) 32 D) 38 E) 36

19. El gráfico que se muestra, representa un cuadrado mágico. Halla el valor de x + y + z.

13	23	21
27	x	y
17		z

A) 48 B) 52 C) 55 D) 40 E) 50

20. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla el valor de a + b + c.

a		16
b	c	6
12	10	20

A) 42 B) 30 C) 38 D) 46 E) 44

NIVEL 3

21. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla x.

$x-2y$		
	$x-y$	
		5

A) 7 B) 6 C) 9 D) 5 E) 8

22. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla "a".

		$3a-6$
$a-b$		
	$a+b$	

A) 3 B) 6 C) 4 D) 7 E) 5

23. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla x + y.

		y
	15	
x		

A) 26 B) 30 C) 32 D) 28 E) 34

24. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla el valor de x.

2		5x
3x		14

A) 8 B) 5 C) 2 D) 6 E) 7

25. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla x + y + z.

$x+1$	$3x$	$z+3$
$z+6$	$2x+1$	x
$y+5$	z	$4x-2$

A) 10 B) 9 C) 8 D) 6 E) 7

26. El gráfico que se muestra representa un cuadrado mágico. Halla x + y + z.

$x+3$	$2x+3$	$4z$
$5z$	$2x+1$	$x+2$
$5y$	z^2	$3x-1$

A) 8 B) 6 C) 12 D) 10 E) 4

27. En el siguiente cuadrado mágico se deben distribuir los números pares del 2 al 32. Da como respuesta el valor de A + B + C + D.

A	4	B	26
	D	20	
	14	12	
C	28	30	

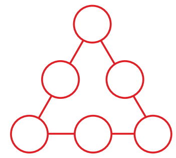
A) 72 B) 68 C) 70 D) 64 E) 60

28. Completa las casillas en blanco con números de un dígito de manera que al sumar los valores de cada fila o columna, resulte 34. Luego, responde: ¿cuántas veces aparece el dígito 9 en ambas diagonales?

	8		9
8			
8			8
		9	

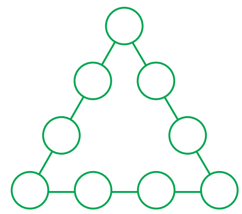
A) 7 B) 8 C) 4 D) 6 E) 10

29. Distribuye los números pares del 1 al 13 en los círculos, de tal modo que la suma de los números en los lados del triángulo sean: 15; 16 y 17. Da como respuesta la suma de los números que se ubican en los vértices del triángulo.



A) 10 B) 9 C) 12 D) 6 E) 8

30. En el gráfico, distribuye los números del 1 al 9, de tal manera que la suma de cada lado del triángulo sea la misma. Da como respuesta la mayor suma.



A) 30 B) 20 C) 28 D) 25 E) 23

Claves

NIVEL 1	9. E	17. C	25. B
1. B	10. C	18. E	26. D
2. D	**NIVEL 2**	19. C	27. B
3. A	11. E	20. E	28. D
4. A	12. B	**NIVEL 3**	29. D
5. C	13. E	21. D	30. E
6. B	14. A	22. A	
7. D	15. C	23. B	
8. B	16. B	24. C	

UNIDAD 2



La escala de Richter y un error habitual

En los últimos tiempos muchos han sido los terremotos que han sacudido de forma más o menos violenta ciertas zonas de nuestro planeta.

Los medios de comunicación se han encargado de darnos información sobre estos sucesos, pero prácticamente todos ellos han cometido el mismo error, al utilizar la palabra "grados" al explicar la escala de Richter.

Comencemos por el principio: cuando hablamos de la magnitud de un terremoto es incorrecto hablar de "grados". Es decir, no es correcto decir "un terremoto de magnitud 5,2 grados en la escala de Richter", lo correcto sería "un terremoto de magnitud 5,2 en la escala de Richter".

La razón es muy sencilla: la escala de Richter no es una escala graduada, por lo que es incorrecto asignarle la palabra "grados" a sus valores. Una escala graduada es una escala en la que se toman dos valores, elegidos de manera arbitraria, y se divide en una cierta cantidad de partes la distancia entre ellos, tomando cada una de esas partes como "un grado". Ese es el caso, por ejemplo, de los grados Celsius.

Bien, ¿y por qué la de Richter no es una escala graduada? Pues porque mide la magnitud de la energía liberada en un terremoto, por lo que sus valores no están asociados a dos puntos elegidos arbitrariamente, sino que son, por decirlo de alguna manera, absolutos.

Por todo ello es erróneo incluir la palabra "grados" junto a la magnitud de un terremoto en la escala de Richter.

Matemática recreativa

¿Quién dice la verdad?

En el aula de 4.° de Secundaria, el primer día de clases dos hermanos gemelos, cuyos nombres son Pepo y Pipo, se presentan ante sus compañeros.

Uno de ellos dice: "Yo soy Pepo".

El otro comenta: "Si lo que él dice es cierto, yo soy Pepo".

Si se sabe que uno de ellos siempre miente y el otro nunca lo hace. ¿Podrías decir quién de los dos dice la verdad?



DIÁLOGO



Operadores matemáticos

Recuerda

Las operaciones matemáticas que se muestran en el cuadro son universalmente conocidas, es decir, que cualquier matemático del mundo sabe que:

$[\![3,2]\!] = 3$



OPERACIÓN MATEMÁTICA

Es un proceso que consiste en la transformación de una o más cantidades en una cantidad llamada resultado, bajo ciertas reglas o condiciones en las que se define la operación. Toda operación matemática presenta una regla de definición y un símbolo que la identifica llamado operador matemático.

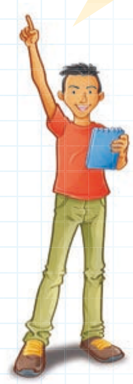
OPERADOR MATEMÁTICO

Es aquel símbolo que representa a una operación matemática. Nos permite reconocer la operación matemática a emplear con su respectiva regla de definición.

Operación matemática	Operador matemático
Adición	$+$
Sustracción	$-$
Multiplicación	$\times$
División	$\div$
Radicación	$\sqrt{}$
Logaritmación	log
Sumatoria	$\sum$
Productoria	$\prod$
Valor absoluto	$\lvert\ \rvert$
Máximo entero	$[\![\ ]\!]$

Atención

Los operadores matemáticos arbitrarios reciben el nombre según la figura o símbolo que representan:
Ejemplo:
♥: operador corazón
♣: operador trébol
@: operador arroba



Las operaciones matemáticas mencionadas en el cuadro de arriba son universalmente conocidas, lo que haremos es definir operaciones matemáticas con operadores y reglas de definición elegidos de forma arbitraria.
El operador matemático puede ser cualquier símbolo (incluso figuras geométricas): $*$, Δ, $\bigcirc$, $\square$, $\otimes$, etc.

Ejemplo:
Se define: $p \square q = 2p^3 + 3q^2$
Calcula: $2 \square 1$
Veamos:

Operador matemático

$$p \square q = \underbrace{2p^3 + 3q^2} \Rightarrow 2 \square 1 = 2(2)^3 + 3(1)^2 = 19$$

Regla de definición

2.° elemento

1.er elemento

Problemas resueltos

1 Si:

$m\Delta n = m^2 - mn$

$a♥b = ab - b^2$

Calcula: $(4\Delta 2)♥(1\Delta -2)$

Resolución:

- $(4\Delta 2) = 4^2 - 4.2 = 16 - 8 = 8$
- $(1\Delta -2) = 1^2 - 1(-2) = 1 + 2 = 3$

Reemplazamos:

$(4\Delta 2)♥(1\Delta -2)$

$8♥3$

$8.3 - 3^2$

$24 - 9$

15

2 Si:

$$ⓜ = \begin{cases} \dfrac{m+5}{2}; \text{ si m es impar} \\ \dfrac{m+4}{2}; \text{ si m es par} \end{cases}$$

Calcula: ⓻ − ⓺ (7 y 6 encerrados en doble círculo)

Resolución:

Primero calculamos: ⑦ y ⑥

$m = 7$ (impar) $\Rightarrow$ ⑦ $= \dfrac{7+5}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

$m = 6$ (par) $\Rightarrow$ ⑥ $= \dfrac{6+4}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

Entonces: ⓻ − ⓺ = ⑥ − ⑤

Ahora calculamos: ⑥ y ⑤

$m = 6$ (par) $\Rightarrow$ ⑥ $= \dfrac{6+4}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

$m = 5$ (impar) $\Rightarrow$ ⑤ $= \dfrac{5+5}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

$\therefore$ ⓻ − ⓺ = ⑥ − ⑤ $= 5 - 5 = 0$

3 Si:

$$a * b = \frac{b-a}{4}$$

Calcula:

$$\underbrace{(\ldots(((1*5)*5)*5)\ldots*5)}_{\text{10 operadores}}$$

Resolución:

Resolviendo cada paréntesis tenemos:

Primer paréntesis: $1 * 5 = \dfrac{5-1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

Segundo paréntesis: $1 * 5 = \dfrac{5-1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

Tercer paréntesis: $1 * 5 = \dfrac{5-1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

Observamos que el resultado de cada paréntesis es el mismo.

Luego: $(\ldots(((1*5)*5)*5)\ldots*5) = 1$

4 Halla:
$$E = \frac{\left(\left\{\left[(3*5)*6\right]*6\right\}\ldots\right)*6}{\left(2\Delta\sqrt{5}\right)+\left(6\Delta 0\right)}$$

Si: $a * b = b \ \wedge \ x\Delta y = 2x + y^2$

Resolución:

Primero desarrollamos el numerador:

$(3 * 5) = 5$

$[5 * 6] = 6$

$\{6 * 6\} = 6$

$\vdots$

$6 * 6 = 6$

Luego: $(\ldots\{[(3*5)*6]\ldots\}*6 = 6$

Desarrollamos el denominador:

$2\Delta\sqrt{5} = 2(2) + \sqrt{5}^2 = 4 + 5 = 9$

$6\Delta 0 = 2(6) + 0^2 = 12$

Entonces: $(2\Delta\sqrt{5}) + (6\Delta 0) = 9 + 12 = 21$

Reemplazamos: $E = \dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$

5 Si: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Calcula: $\begin{pmatrix} 1024 & 343 \\ 7^{-2} & 2^{-7} \end{pmatrix}$

Resolución:

$$\begin{pmatrix} 1024 & 343 \\ 7^{-2} & 2^{-7} \end{pmatrix} = 1024 . 2^{-7} - 343 . 7^{-2}$$
$$= 2^{10} . 2^{-7} - 7^3 . 7^{-2}$$
$$= 2^3 - 7$$
$$= 8 - 7$$
$$= 1$$

6 Si: $\boxed{x} = 2x + 3$

ⓧ (x en un círculo dentro de un cuadrado) $= 4x - 3$

Calcula: ⑦ (7 en doble círculo)

Resolución:

$2\textcircled{x} + 3 = 4x - 3$

$2\textcircled{x} = 4x - 6$

$\textcircled{x} = 2x - 3$

Luego: $\textcircled{7} = 2(7) - 3 = 14 - 3 = 11$

$\Rightarrow \textcircled{\textcircled{7}} = \textcircled{11} = 2(11) - 3 = 22 - 3 = 19$

7 Si: $\textcircled{x} + \textcircled{x+1} = 20 - \textcircled{x-1}$, halla el valor de:

$E = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + ... + \textcircled{53} + \textcircled{54}$

Resolución:

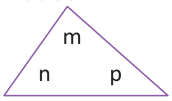
Sabemos que: $\textcircled{x-1} + \textcircled{x} + \textcircled{x+1} = 20$; entonces:

$E = \underbrace{\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3}}_{20} + \underbrace{\textcircled{4}+\textcircled{5}+\textcircled{6}}_{20} + ... + \underbrace{\textcircled{52}+\textcircled{53}+\textcircled{54}}_{20}$

Como hay $\frac{54}{3} = 18$ grupos de 3 operaciones, con números consecutivos y cada uno suma 20

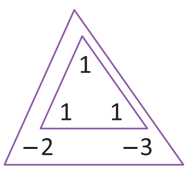
$\Rightarrow E = 18 \times 20 = 360.$

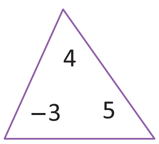
8 Dados:



$= \boxed{p + m + n} \wedge \boxed{k} - k^2 = 0$

Halla el valor de:

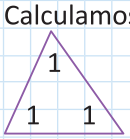
M = 

$-$ 

Resolución:

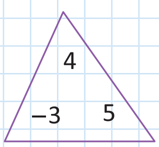
Se observa que: $\boxed{k} = k^2$

Calculamos:



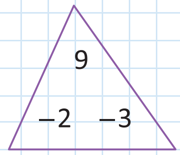
$= \boxed{1 + 1 + 1} = \boxed{3}$

Luego: $\boxed{3} = 3^2 = 9$



$= \boxed{5 + 4 - 3} = \boxed{6}$

Luego: $\boxed{6} = 6^2 = 36$

Reemplazamos: M = 

$- 36$

$M = \boxed{-3 + 9 - 2} - 36$

$M = \boxed{4} - 36$

$M = 4^2 - 36$

$M = 16 - 36$

$M = -20$

9 Se define los operadores Δ y ∇ de la siguiente manera: $a \Delta b = \begin{cases} (a+b)^2; a \geq b \\ ab \;\; ; a < b \end{cases} \wedge \; a \nabla b = \sqrt[3]{ab}$

Entonces el valor de $(2 \Delta 3)\nabla(5 \Delta 1)$, es:

Resolución:

$(2 \Delta 3) = 2(3) = 6$

$(5 \Delta 1) = (5 + 1)^2$

$= 6^2 = 36$

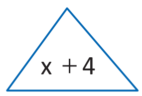
Reemplazamos:

$(2 \Delta 3) \nabla (5 \Delta 1)$

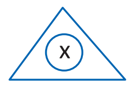
$6 \nabla 6^2$

$\sqrt[3]{6 \times 6^2} = 6$

10 Si:



$= 4x - 2 \quad \wedge$



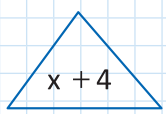
$= 12x + 2$

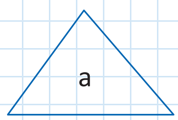
Halla: $\textcircled{4}$

Resolución:

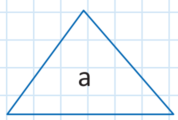
Hacemos un cambio de variable:

$x + 4 = a \Rightarrow x = a - 4$

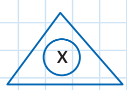


$=$ 

$= 4(a - 4) - 2$



$= 4a - 18$

Luego: 

$= 12x + 2$

$4\textcircled{x} - 18 = 12x + 2$

$4\textcircled{x} = 12x + 20 \Rightarrow \textcircled{x} = 3x + 5$

Finalmente:

$\textcircled{4} = 3(4) + 5 = 17$

Actividades de razonamiento

1. Se define: $\boxed{x} = 3x + 6$

Además: $\textcircled{x+1} = 3x - 1$

Calcula: $\textcircled{\boxed{10}}$

A) 110 B) 90 C) 80 D) 120 E) 104

2. Se define:

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline \multicolumn{2}{c}{c} \end{array} = \frac{a+b}{a-b} - \frac{b+c}{b-c}$$

Halla: $\begin{array}{c|c} 14 & 10 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{8} \end{array}$

A) 4 B) 8 C) 10 D) – 3 E) 5

3. Siendo: $\textcircled{n} = n^2 + 4 \;\wedge\; \boxed{n} = 2n - 1$

Calcula: $\textcircled{\textcircled{1}} - \boxed{\boxed{4}}$

A) 17 B) 16 C) 15 D) 19 E) 22

4. Si: $a \heartsuit b = a^2 - ab$

Halla x en: $(x + 2) \heartsuit (x - 1) = 4x$

A) 10 B) 8 C) 6 D) 9 E) 7

5. Si: $a \blacklozenge b = (a + b)^2 - (a - b)^2$

Calcula: $N = \dfrac{111 \blacklozenge 52}{37 \blacklozenge 13}$

A) 24 B) 18 C) 15 D) 16 E) 12

6. Si: $2a \,\#\, 3b = a^3 + b^2$

Calcula: $M = 4 \,\#\, 9$

A) 30 B) 18 C) 17 D) 25 E) 21

7. Si: $\left(\dfrac{a}{3}\right) \Delta \left(\dfrac{b}{4}\right) = a + ab + b$

Calcula: $(2 \Delta 3) + 4$

A) 100 B) 70 C) 60 D) 80 E) 94

8. Si: $\boxed{x - 2} = x(x - 2)$

Halla: $\boxed{x - 1}$

A) x^2 B) $x^2 - 1$ C) $x - 2$ D) $x - 1$ E) $x^2 - 2$

9. Si: $\boxed{3x+1} = 6x - 1$

Halla: $\boxed{\boxed{2}}$

A) 2 B) –1 C) 10 D) 3 E) 0

10. Se define la operación:

$a \nabla b = ab + b - a$

Según esto, halla x en: $5 \nabla x = (7 \nabla 4) \nabla 10$

A) 50 B) 20 C) 40 D) 10 E) 30

11. Si: $m * n = \dfrac{m^2}{2} + 3$

Calcula: $B = \underbrace{4 * (5 * (6 * ...))}_{2013 \text{ operadores}}$

A) 11 B) 14 C) 16 D) 12 E) 13

12. Si $a \# b = \begin{cases} a^2 - 1 & ; \text{ si } a \geq b \\ b^2 - a & ; \text{ si } a < b \end{cases}$

Calcula: $E = 5 \# \sqrt{4 \# \sqrt{17}}$

A) 18 B) 16 C) 24 D) 20 E) 14

13. Se define el operador:

$\triangle_{a} = (a-1)^2$

Halla x en: $\triangle\!\!\triangle\!\!\triangle_{x} = 64$

A) 4 B) 6 C) 7 D) 3 E) 5

14. Si se sabe que: $\textcircled{x} = 2x + 1$

Además: $\boxed{x+2} = 3\,\textcircled{x-1}$

Calcula: $\boxed{8} + \boxed{9}$

A) 68 B) 72 C) 75 D) 70 E) 55

Claves

1. E	5. E	9. B	13. D
2. D	6. C	10. C	14. B
3. B	7. E	11. A	
4. C	8. B	12. C	

Reto



Se define:

$\textcircled{\tfrac{1}{2}} = 0{,}125$

$\textcircled{\tfrac{5}{3}} = 2{,}\overset{\frown}{7}$

$\textcircled{\textcircled{\tfrac{2}{5}}} = \dfrac{16}{625}$

Calcula:

$E = \textcircled{3} + \textcircled{\textcircled{2}}$

Rpta.: 59

Refuerza practicando

NIVEL 1

1 Si: ◇P◇ $= \dfrac{6P - 15}{5}$

Calcula: ◇15◇

A) 16 B) 14 C) 15 D) 12 E) 13

2 Se define: $m \# n = \dfrac{3m - 8n}{2}$

Calcula: 10 # 4

A) 1 B) 2 C) −2 D) −1 E) 3

3 Si: $a * b = \dfrac{a + b}{a - b}$; $a \neq b$

Calcula: $E = \dfrac{2 * 1}{4 * 3}$

A) 1 B) $\dfrac{2}{5}$ C) $\dfrac{3}{7}$ D) $\dfrac{5}{3}$ E) $\dfrac{2}{7}$

4 Si: $\textcircled{a^b} = a + b + 1$

Calcula: $\textcircled{2^3} + \textcircled{4^5} + \textcircled{1^6}$

A) 20 B) 24 C) 21 D) 19 E) 23

5 Si: $a * b = 2a + 5b$, halla: $(2 * 3) * 1$

A) 18 B) 19 C) 27 D) 43 E) 41

6 Si: $\boxed{a} = a^2 + 1 \;\wedge\; x * y = 2x + y - 3$

Calcula: $\boxed{2 * 5}$

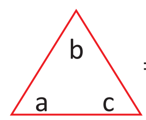
A) 26 B) 50 C) 37 D) 82 E) 65

7 Si: $a * b = 2a + b$.

Calcula: $m = (3 * 2) * (4 * 5)$

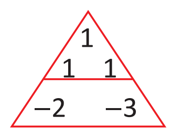
A) 25 B) 19 C) 29 D) 31 E) 17

8 Si:



$= \boxed{a + b + c}$ y $\boxed{a} = a^2$

Halla el valor de:



A) 16 B) 4 C) 1 D) 196 E) 9

9 Halla x si:



$= (A + 1)^2$



$= 676$

A) 0 B) 5 C) 3 D) 1 E) 2

NIVEL 2

10. Si: $\boxed{a} = a + 2$ y $\underset{x}{\triangle} = \boxed{x} + 3$

Calcula: $\underset{7}{\triangle} + \boxed{2}$

A) 15 B) 16 C) 10 D) 9 E) 13

11. Si:

$32 * 28 = 16$
$43 * 12 = 15$
$32 * 21 = 9$

Halla: $(32 * 25) * 12$

A) 6 B) 12 C) 8 D) 11 E) 14

12. Halla: $a + b$

$15 ** 16 = 60$
$12 ** 12 = 36$
$20 ** 12 = 60$
$14 ** 20 = \overline{ab}$

A) 10 B) 9 C) 8 D) 6 E) 7

13. Si: $\$\,a = 3\boxed{a - 1} + 8$

$\boxed{b} = 5b - 4$

Calcula x en: $\boxed{x} = \$\,5$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

14. Si: $\boxed{x} = 3x + 6$; y

$\boxed{\underset{x+1}{\triangle}} = 3x - 6$

Calcula: $\underset{10}{\triangle}$

A) 12 B) 28 C) 31 D) 67 E) 101

15. Si: $P\left(\frac{x}{y}\right) = P(x) - P(y)$; calcula: $\frac{P(4)}{P(2)}$

A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) $\frac{1}{2}$

16. Si: $F(x) = 2x - 1$; reduce: $F(x + 2) + F(-1)$

A) $2x - 3$ B) $1 - 2x$ C) 0 D) $2x$ E) 1

17. Si: $\underset{P}{\triangle} - 3 = P(P - 1)$

Halla: $\underset{4}{\triangle} + \underset{2}{\triangle\!\!\triangle}$

A) 36 B) 15 C) 23 D) 38 E) 46

18. Si: $x \,\Delta\, y = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Calcula: $(2 \,\Delta\, 1) \,\Delta\, (1 \,\Delta\, 2)$

A) 1008 B) 1458 C) 1615
D) 1718 E) 1415

19. Si: $a * b = 3(a + b) + 1$ y $c \,\Delta\, d = c - \frac{d}{2}$

Calcula: $(8 * 2) \,\Delta\, 30$

A) 16 B) 31 C) 32 D) 18 E) 15

20. Si: $\boxed{x+1} = x^2 + 3x + 2$

Halla x en: $\boxed{x} = 42$

A) 2 B) 1 C) 0 D) 3 E) 4

NIVEL 3

21. Si: ⓧ $= x^2 - 1$ y $\triangle x$ (en círculo) $= x(x+2)$

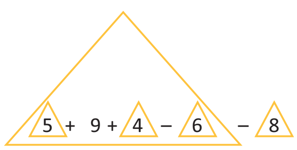
Calcula: $\left(\triangle 3 + ② \right)^2$

A) 64 B) 49 C) 81 D) 36 E) 25

22. Si: $\triangle a$ = 2a; para a impar y

$\triangle a$ = a; para a par.

Calcula:



A) 24 B) 16 C) 36 D) 26 E) 18

23. Si: $a \# b = \left(\dfrac{a^2 b + 35b}{4a} \right) b^{-1}; \ a \neq 0$

Calcula: 5 # [5 # {5 # (5 # (...))}]

A) 3 B) 2 C) 1 D) −1 E) −2

24. Se define: $\boxed{a} = a^2 - 1$; $a > 0$

Además: $\boxed{\triangle a} = a(a+2)$.

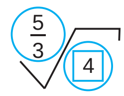
Calcula: $\triangle 3 + \boxed{\triangle 3} - \boxed{2}$

A) 16 B) 6 C) 36 D) 9 E) 81

25. Se define:

$\boxed{x} = 2x + 1$; $\boxed{ⓝ} = 3n$

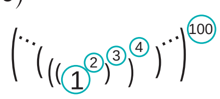
Calcula:



A) $\sqrt{17}$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{10}$
D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{12}$

26. Si: ⓧ $= (x - 6)^{x+1}$

Calcula: A =

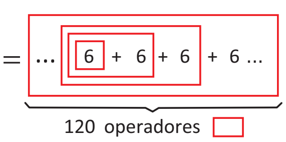


A) 0 B) 1 C) 25
D) 3 E) 12 501

27. Se define en ℕ: $\boxed{n-5}$ (en círculo) $= n - 9$

Halla:

A =



A) 200 B) 246 C) 240
D) 236 E) 248

28 Si la operación Δ se define:

$$m \,\Delta\, n = (m+n)\sqrt{m \,\Delta\, n}$$

Calcula:

$$M = (-1 \,\Delta\, 2)^{\underbrace{(0\Delta 3)^{(1\Delta 4)^{\cdots}}}_{100 \text{ operadores}}}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 56

29 Si: $m \,@\, n = 3m - 20$, calcula:

$$A = \underbrace{1^2 \,@\, (2^2 \,@\, (3^2 \,@\, (4^2 \,@\, \ldots (\ldots))))}_{50^2 \text{ paréntesis}}$$

A) –20 B) –17 C) –15
D) 99 E) 2500

30 Se define:

$$\triangle_{x-3} = \begin{cases} 2x-1 \;;\; x \leq -1 \\ 2x-2 \;;\; -1 < x \leq 1 \\ 2x+1 \;;\; 1 < x \end{cases}$$

Halla:

$$E = \triangle_{-1} + \triangle_{-2} + \triangle_{-5}$$

A) 2 B) 0 C) 1 D) –1 E) 3

31 Calcula el valor de:

2003 circunferencias



Si: $\boxed{x} = x^2 + 2x$

$\boxed{5} = 35$

A) 5 B) 15 C) 10
D) 5^{2003} E) 5555

32 Se define: $\boxed{x \,|\, y} = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}$

Calcula el valor de E.

$$E = \left\{ \cdots \left\{ \left[\left(\boxed{2003 \,|\, 1} \right)^{\boxed{2002 \,|\, 2}} \right]^{\boxed{2001 \,|\, 3}} \right\}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\boxed{1 \,|\, 2003}}}}} \right\}$$

A) 0 B) 1 C) 2003
D) 2003^{2003} E) –1

33 Si: $a * b = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{(a+b) \text{ veces}}$

Calcula: $E = [(a+b)*(a+b)]$

A) $(a+b)^{a+b}$ B) $4(a+b)^{(a+b)^2}$
C) $(a+b)^{2(a+b)}$ D) $(4(a+b)^2)^{(a+b)}$
E) $(a+b)^{4(a+b)}$

Claves

NIVEL 1	9. D	17. D	25. B
1. C	NIVEL 2	18. B	26. B
2. D	10. B	19. A	27. B
3. C	11. A	20. A	28. B
4. B	12. E	NIVEL 3	29. B
5. D	13. E	21. A	30. B
6. C	14. C	22. D	31. A
7. C	15. C	23. A	32. B
8. A	16. D	24. B	33. D

Conteo de figuras

El conteo de figuras puede realizarse mediante dos formas:

MÉTODO DE PARTES

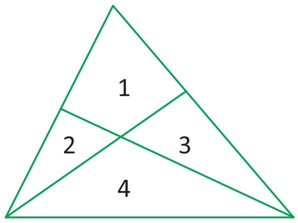
Consiste en contar de una manera ordenada las figuras que existen, con el siguiente orden:

- Figura de una parte, es decir, aquellas que se ven a simple vista.
- Figuras de dos partes, es decir, aquellas que se forman al unir dos partes consecutivas.
- Figuras de tres partes, es decir, aquellas que se forman al unir tres partes consecutivas.

Y así sucesivamente, hasta contar el todo o figuras más grandes.

Ejemplos:

1. Halla el total de triángulos.



Resolución:

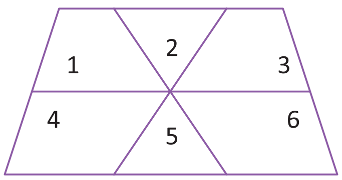
Con 1 número: 2; 3; 4 — 3

Con 2 números: 12; 13; 24; 34 — 4

Con 4 números: 1234 — 1

Total: 8

2. Halla el número total de cuadriláteros.



Resolución:

Con 1 número: 1; 3; 4; 6 — 4

Con 2 números: 12; 23; 45; 56 — 4

Con 3 números: 123; 456; 124; 145; 236; 356 — 6

Con 6 números: 123456 — 1

Total: 15

Importante

El contar figuras resulta ser un procedimiento sencillo, en la medida que este conteo se realice en forma ordenada, y para ello debemos indicar las figuras que se desean contar con números y/o letras.



Atención

Este método es el adecuado para figuras irregulares o figuras asimétricas, es decir, que no guardan cierta regularidad en sus partes.



MÉTODO POR FÓRMULA

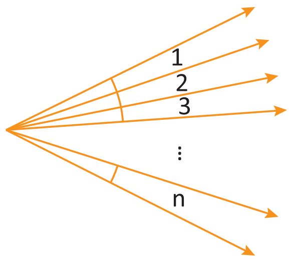
Se aplica principalmente a figuras simétricas o figuras regulares, que tienen un aspecto típico al cual se le puede aplicar alguna de las fórmulas que se indican.

Número de segmentos



$$\text{Número de segmentos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de ángulos



$$\text{Número de ángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$



Observación

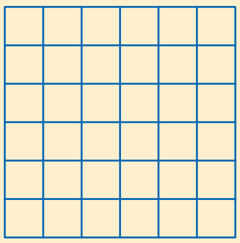
- Segmentos
- Ángulos
- Triángulos

n.° de figuras geométricas $= \frac{n(n+1)}{2}$

- Cuadriláteros
- Hexágonos
- Octágonos

Atención

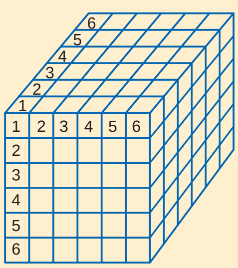
¿Cuántos cuadrados hay en la figura?



n.° de □ = $\frac{6(6+1)(2(6)+1)}{6} = 91$

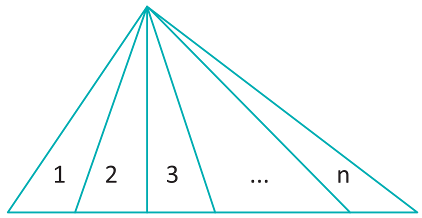


Atención



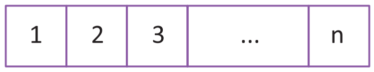
$\left[\frac{6(6+1)}{2}\right]^2 = 21^2 = 441$

Número de triángulos

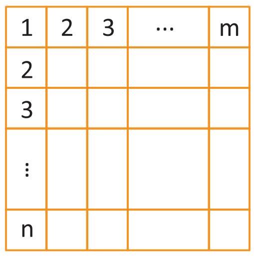


$$\text{Número de triángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de cuadriláteros

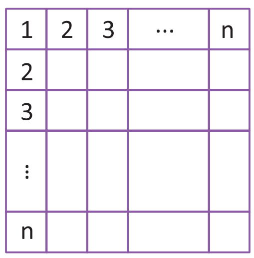


$$\text{Número de cuadriláteros} = \frac{n(n+1)}{2}$$

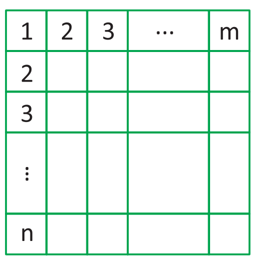


$$\text{Número de cuadriláteros} = \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Número de cuadrados

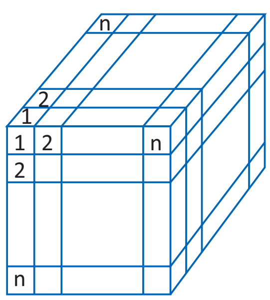


$$\text{Número de cuadrados} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



$$\text{Número de cuadrados} = m \,.\, n + (m-1)(n-1) + \ldots$$

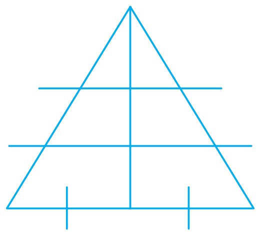
Número de cubos



$$\text{Número de cubos} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

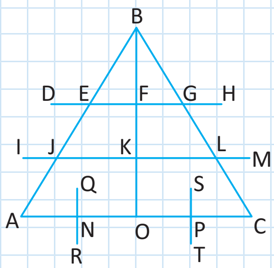
Problemas resueltos

1 Halla el número total de segmentos en la figura.



Resolución:

Asignamos letras a cada punto y números a cada segmento simple.



Número de segmentos en $\overline{DH} = \dfrac{4(5)}{2} = 10$

Número de segmentos en $\overline{IM} = \dfrac{4(5)}{2} = 10$

Número de segmentos en $\overline{AC} = \dfrac{4(5)}{2} = 10$

Número de segmentos en $\overline{AB} = \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Número de segmentos en $\overline{BO} = \dfrac{3(4)}{2} = 6$

Número de segmentos en $\overline{BC} = \dfrac{3(4)}{2} = 6$

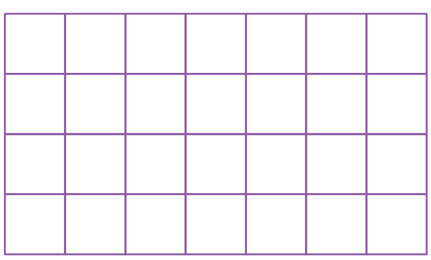
Número de segmentos en $\overline{QR} = \dfrac{2(3)}{2} = 3$

Número de segmentos en $\overline{ST} = \dfrac{2(3)}{2} = 3$

$\therefore$ Número total de segmentos:

$3(10) + 3(6) + 2(3) = 54$

2 Determina el número total de cuadriláteros que no son cuadrados.



Resolución:

Asignamos números en forma horizontal y vertical para aplicar la fórmula.

1	2	3	4	5	6	7
2						
3						
4						

n.° cuadriláteros = n.° cuadrados + n.° cuadriláteros que no son □

n.° cuadriláteros que no son □ = n.° cuadriláteros – n.° cuadrados

Luego:

n.° cuadriláteros $= \dfrac{7 \times 8}{2} \times \dfrac{4 \times 5}{2} = 280$

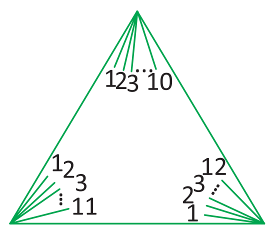
n.° cuadrados $= 7 \times 4 + 6 \times 3 + 5 \times 2 + 4 \times 1$

$= 28 + 18 + 10 + 4 = 60$

$\therefore$ n.° cuadriláteros que no son cuadrados:

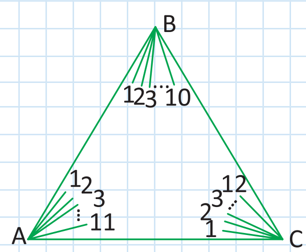
$280 - 60 = 220$

3 ¿Cuántos ángulos agudos hay en la figura adjunta?



Resolución:

Contamos los ángulos que hay en cada vértice:



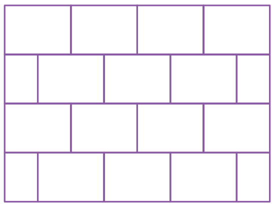
Número de ángulos en A $= \dfrac{12 \times 13}{2} = 78$

Número de ángulos en B $= \dfrac{11 \times 12}{2} = 66$

Número de ángulos en C $= \dfrac{13 \times 14}{2} = 91$

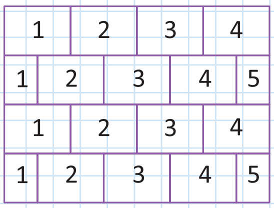
$\therefore$ Número total de ángulos $= 78 + 66 + 91 = 235$.

4 ¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura adjunta?



Resolución:

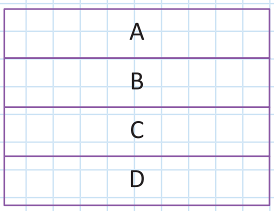
Asignamos números a cada ragión para aplicar fórmula.



Número de cuadriláteros:

$$2\left(\frac{4(5)}{2}\right)+2\left(\frac{5(6)}{2}\right)=50$$

Ahora vamos a contar los cuadriláteros compuestos.

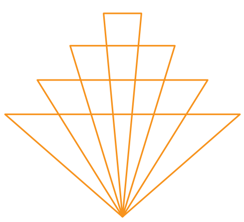


Contamos el número de cuadriláteros con 2 o más letras (los cuadriláteros con 1 letra ya se contaron).

Con 2 letras: AB; BC; CD	3
Con 3 letras: ABC; BCD	2
Con 4 letras: ABCD	1
	6

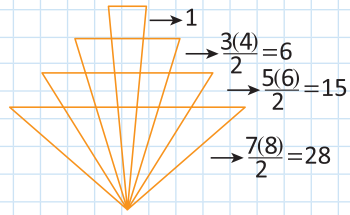
∴ Número total de cuadriláteros = 50 + 6 = 56.

5 Determina el número total de triángulos.



Resolución:

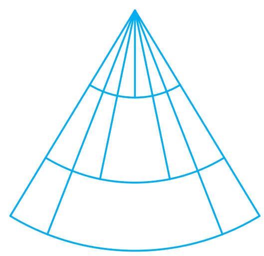
Contamos por partes.



∴ Número total de triángulos:

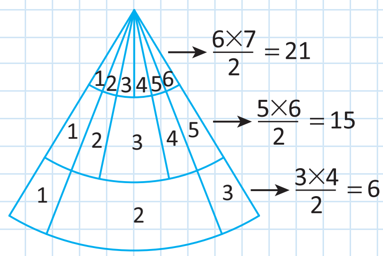
$1 + 6 + 15 + 28 = 50$

6 Calcula el número total de sectores circulares en la figura:



Resolución:

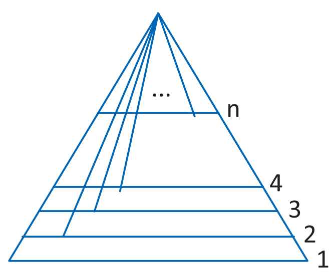
Calculamos por partes:



∴ Número total de sectores circulares:

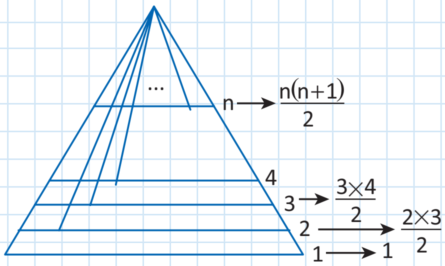
$21 + 15 + 6 = 42$

8 ¿Cuál es el total de triángulos que se muestra a continuación?



Resolución:

Contamos por partes:



n.° total de triángulos:

$= 1 + \frac{2\times 3}{2} + \frac{3\times 4}{2} + ... + \frac{n(n+1)}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}(2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1))$

$= 1 + \frac{1}{2}(\underbrace{1\times 2 + 2\times 3 + ... + n(n+1)}_{S} - 1\times 2)$

$= 1 + \frac{1}{2}(S - 1\times 2) = 1 + \frac{S}{2} - 1 = \frac{S}{2}$

Recuerda:

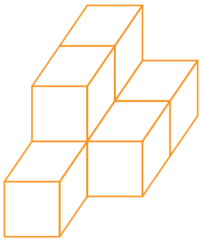
$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + n(n+1)$

$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\therefore$ n.° total de triángulos $= \frac{S}{2}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

9 ¿Cuántos cubitos faltan como mínimo para completar un cubo sólido compacto en la figura?



Resolución:

Del gráfico se observa que:

Cantidad de cubitos que se tienen es:

$2 + 2 + 2 + 1 = 7$

Como se debe tener un cubo compacto:

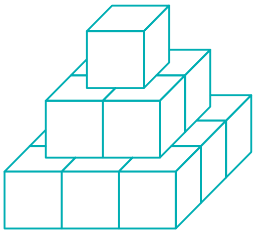
Cantidad de cubitos que se deben tener es:

$3\times 3\times 3 = 27$

Luego:

n.° cubitos que faltan = 27 – 7 = 20.

10 Se tiene una pirámide escalonada. Si se quiere construir una similar de 8 cubitos de altura. ¿Cuántos cubitos más se necesitarán?



Resolución:

Del gráfico se observa que:

Fila 1: 1 cubito $= 1^2$

Fila 2: 4 cubitos $= 2^2$

Fila 3: 9 cubitos $= 3^2$

Luego:

Cantidad de cubitos que se tiene:

$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

Ahora vamos a formar una pirámide de 8 filas.

Fila 1: 1 cubito $= 1^2$

Fila 2: 4 cubitos $= 2^2$

Fila 3: 9 cubitos $= 3^2$

⋮

Fila 8: 64 cubitos $= 8^2$

Luego:

Cantidad de cubitos que se debe tener:

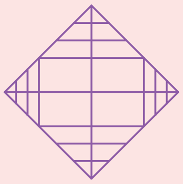
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 8^2 = \frac{8\times 9\times 17}{6} = 204$

$\therefore$ Cantidad de cubitos que faltan:

$204 - 14 = 190$

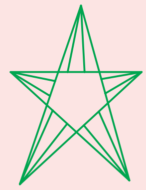
Actividades de razonamiento

1. El número de triángulos en la figura es:



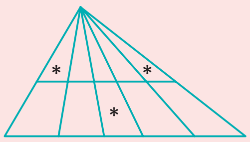
A) 40 B) 42 C) 36 D) 32 E) 44

2. ¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



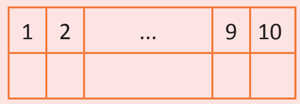
A) 45 B) 35 C) 40 D) 42 E) 37

3. ¿Cuántos triángulos tienen por los menos un asterisco?



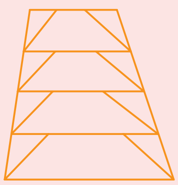
A) 20 B) 24 C) 26 D) 22 E) 18

4. ¿Cuántos segmentos hay en la figura?



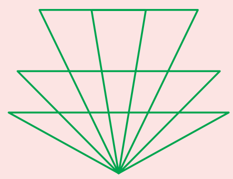
A) 195 B) 178 C) 198 D) d168 E) 190

5. ¿Cuántos cuadriláteros en total se observa en la figura?



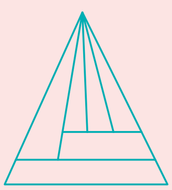
A) 20 B) 22 C) 18 D) 19 E) 17

6. Determina el número total de triángulos.



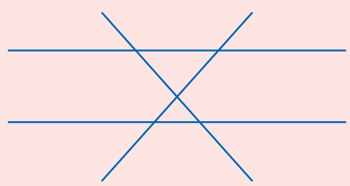
A) 41 B) 47 C) 49 D) 44 E) 45

7. Calcula el número total de triángulos en:



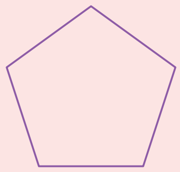
A) 10 B) 12 C) 14 D) 8 E) 6

8. ¿Cuántos segmentos hay en la figura?



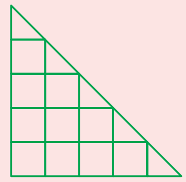
A) 38 B) 36 C) 34 D) 40 E) 32

9. ¿Cuántos segmentos hay en la siguiente figura después de trazar todas las diagonales?



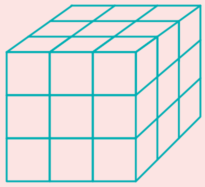
A) 30 B) 28 C) 37 D) 35 E) 32

10. Halla el número total de triángulos en la figura:



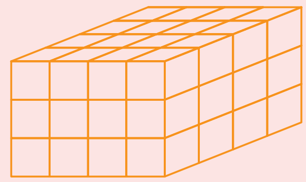
A) 15 B) 18 C) 10 D) 20 E) 13

11. De la siguiente figura si:
C = n.° de cubos
T = n.° de paralelepípedos
Halla T – C.



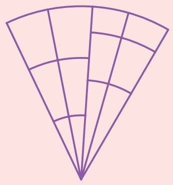
A) 200 B) 180 C) 170 D) 195 E) 216

12. ¿Cuántos paralelepípedos hay?



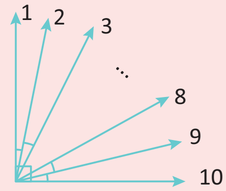
A) 450 B) 400 C) 500 D) 550 E) 600

13. ¿Cuántos sectores circulares hay en la siguiente figura?



A) 22 B) 18 C) 28 D) 20 E) 21

14. ¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?



A) 54 B) 43 C) 44 D) 55 E) 45

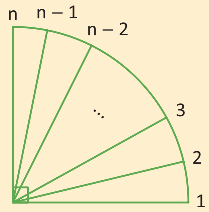
Claves

1. E
2. B
3. D
4. C
5. B
6. C
7. A
8. E
9. D
10. A
11. B
12. E
13. A
14. C

Reto



¿Cuántos ángulos agudos hay en la siguiente figura?

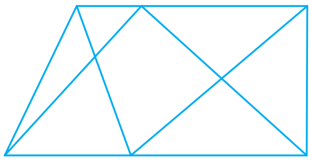


Rpta.: $\frac{(n+2)(n-1)}{2}$

Refuerza practicando

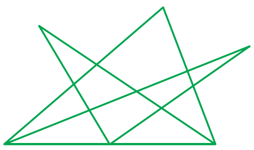
NIVEL 1

1. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden contar en total en el siguiente gráfico?



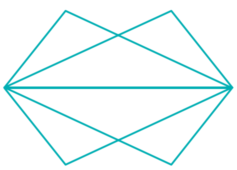
A) 8
B) 9
C) 10
D) 11
E) 12

2. Calcula la cantidad de cuadriláteros convexos en el gráfico.



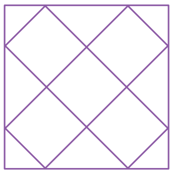
A) 6
B) 7
C) 13
D) 9
E) 16

3. ¿Cuántos triángulos se cuentan en total en el siguiente gráfico?



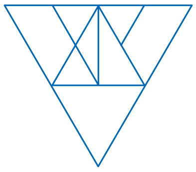
A) 9
B) 7
C) 10
D) 12
E) 14

4. Calcula el total de cuadriláteros en la figura.



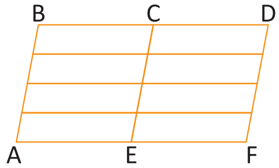
A) 32
B) 28
C) 31
D) 24
E) 30

5. Calcula la cantidad de triángulos que hay en la siguiente figura:



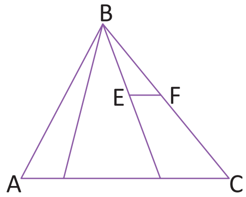
A) 13
B) 12
C) 11
D) 15
E) 14

6. ¿Cuántos paralelogramos hay en la figura?



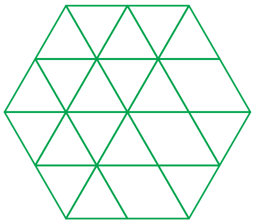
A) 50
B) 60
C) 45
D) 30
E) 20

7. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



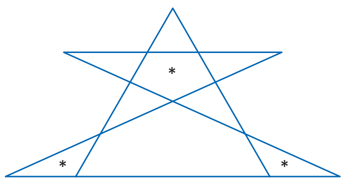
A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

8. ¿Cuántos triángulos hay, en total, en la siguiente figura?



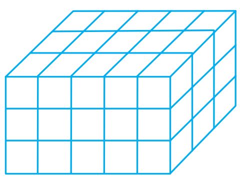
A) 25
B) 28
C) 29
D) 32
E) 20

9. ¿Cuántos triángulos tienen por lo menos un asterisco?



A) 7
B) 9
C) 4
D) 6
E) 5

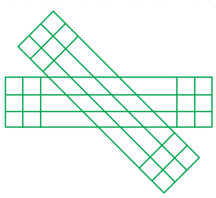
10. Calcula el número total de cubos que se pueden contar en el siguiente gráfico.



A) 42
B) 50
C) 36
D) 64
E) 68

NIVEL 2

11. Calcula el total de cuadriláteros en la figura.



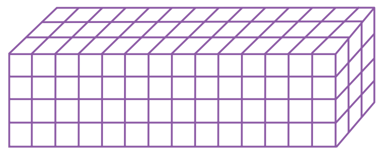
A) 504
B) 536
C) 307
D) 400
E) 552

12. ¿Cuántos sectores circulares se cuentan en total en la siguiente figura?



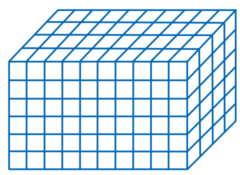
A) 216
B) 168
C) 186
D) 280
E) 218

13. Calcula el número de paralelepípedos en la figura.



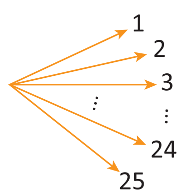
A) 3352
B) 3353
C) 6300
D) 3350
E) 3354

14. Calcula el número total de cubos en la figura.



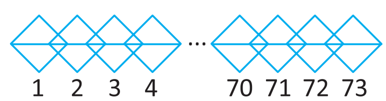
A) 460
B) 450
C) 464
D) 472
E) 448

15. Calcula la cantidad de ángulos agudos que se cuentan en el gráfico.



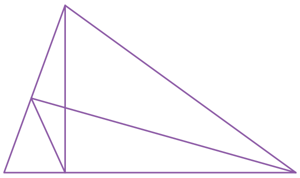
A) 200
B) 250
C) 300
D) 360
E) 400

16. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



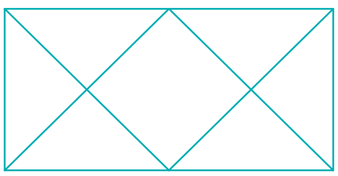
A) 290 B) 292 C) 304 D) 294 E) 300

17 La mitad del número de segmentos de recta que se representan en la figura es:



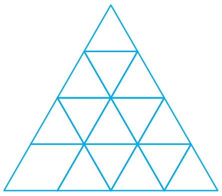
A) 6
B) 5
C) 8
D) 7
E) 4

18 ¿Cuántos cuadriláteros y cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



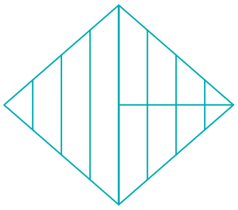
A) 10-6
B) 12-12
C) 6-12
D) 10-10
E) 12-6

19 ¿Cuántos triángulos hay?



A) 22
B) 23
C) 24
D) 26
E) 25

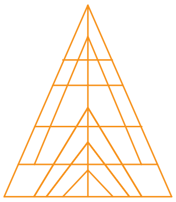
20 Halla el número de triángulos en:



A) 17
B) 15
C) 18
D) 16
E) 14

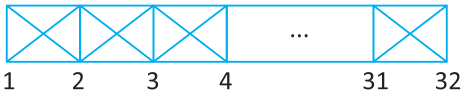
NIVEL 3

21 ¿Cuántos triángulos se pueden contar, en total, en la siguiente figura?



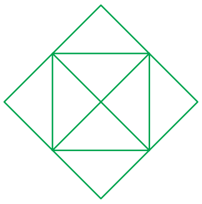
A) 45
B) 48
C) 51
D) 42
E) 40

22 Determina la cantidad total de triángulos que se pueden contar en la siguiente figura:



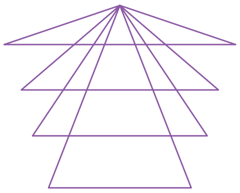
A) 304 B) 308 C) 306 D) 302 E) 300

23 ¿Cuántos pentágonos se podrán contar como máximo en la siguiente figura?



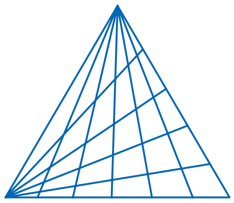
A) 24
B) 18
C) 16
D) 22
E) 20

24 ¿Cuántos triángulos se cuentan en total en la siguiente figura?



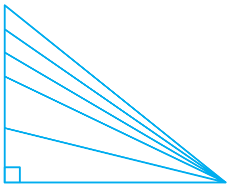
A) 45
B) 29
C) 40
D) 50
E) 30

25. Calcula el número total de triángulos en la figura.



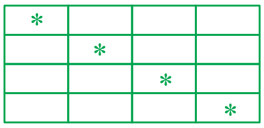
A) 163
B) 164
C) 165
D) 170
E) 175

26. Calcula la cantidad de ángulos agudos que tiene el gráfico:



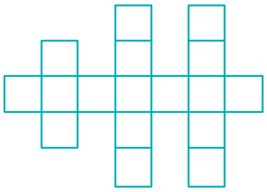
A) 228
B) 239
C) 420
D) 210
E) 230

27. ¿Cuántos cuadriláteros tienen por lo menos un asterisco en el gráfico?



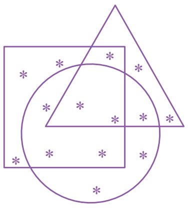
A) 65
B) 70
C) 72
D) 74
E) 76

28. Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en los cuadriláteros mostrados.



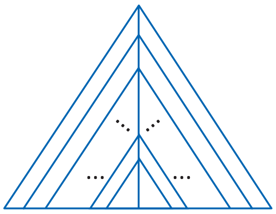
A) 118
B) 119
C) 120
D) 124
E) 122

29. ¿Cuántos asteriscos pertenecen a una y solo una figura?



A) 7
B) 10
C) 8
D) 6
E) 5

30. ¿Cuántos triángulos como máximo existen en la siguiente figura?

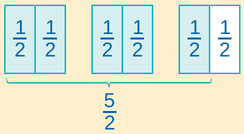


A) 20
B) 15
C) 30
D) 10
E) 25

Claves

NIVEL 1	9. B	17. D	25. C
1. E	10. D	18. B	26. C
2. E	NIVEL 2	19. E	27. B
3. C	11. A	20. D	28. E
4. A	12. D	NIVEL 3	29. A
5. B	13. C	21. A	30. C
6. D	14. A	22. B	
7. A	15. C	23. C	
8. C	16. A	24. D	

Fracciones





DEFINICIÓN

Una fracción es la división indicada de dos números enteros positivos de la forma $\frac{a}{b}$, con la condición de que "a" debe ser diferente de todo múltiplo de "b".

Es decir:

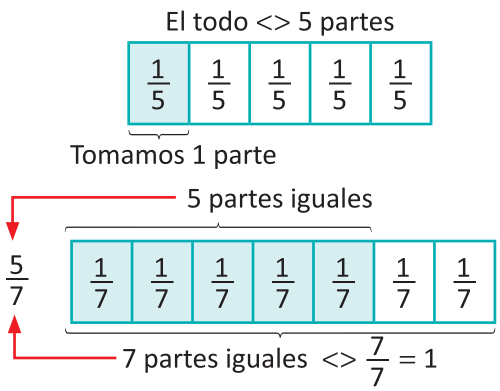
$$f = \frac{a}{b} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{numerador} \\ \longrightarrow \text{denominador} \end{array}$$

Donde:

$$a \text{ y } b \in \mathbb{Z}^+$$
$$a \neq \overset{\circ}{b}$$

Representación gráfica de una fracción

Ejemplos:



CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

Fracciones propias

Cuando la fracción $f = \frac{a}{b}$ es menor que la unidad.

$$f \text{ es propia} \Longleftrightarrow f < 1 \ (a < b)$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{15}{91}$$

Fracciones impropias

Cuando la fracción $f = \frac{a}{b}$ es mayor que la unidad.

$$f \text{ es impropia} \Longleftrightarrow f > 1 \ (a > b)$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{2}; \frac{7}{4}; \frac{38}{9}$$

Atención

¿Cuántas fracciones impropias existen cuyo numerador sea 31?

Sea: $f = \frac{31}{D}$

Como es impropia: $\frac{31}{D} > 1$

$\Rightarrow D < 31$

Luego: $D \in \{2; 3; 4; ...; 30\}$

$\therefore$ Existen 29 fracciones.



Fracción común u ordinaria

Cuando el denominador no es una potencia de 10.

Ejemplos:

$$\frac{3}{8}; \frac{11}{7}; \frac{13}{9}; \frac{25}{17}$$

Fracción decimal

Cuando el denominador es una potencia de 10.
Ejemplos:

$$\frac{13}{100};\ \frac{7}{10};\ \frac{21}{1000};\ \frac{49}{10000}$$

Fracciones homogéneas

Es un grupo de fracciones que tienen el mismo denominador.
Ejemplos:

$$\frac{5}{7};\ \frac{9}{7};\ \frac{13}{7};\ \frac{8}{7}$$

Fracciones heterogéneas

Es un grupo de fracciones donde no todos poseen el mismo denominador.
Ejemplos:

$$\frac{7}{5};\ \frac{3}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{9}{11}$$

Fracción reductible

Cuando los términos de una fracción (numerador y denominador) tienen factores en común.
Ejemplos:

$$\frac{9}{27};\ \frac{8}{6};\ \frac{5}{10};\ \frac{12}{15}$$

Fracción irreductible

Cuando los términos de una fracción (numerador y denominador) tienen como único factor común a la unidad.
Ejemplos:

$$\frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{9}{4};\ \frac{401}{11}$$

FRACCIONES EQUIVALENTES

Dos fracciones son equivalentes cuando con términos distintos expresan la misma porción de la unidad.

$$\frac{a}{b} <> \frac{c}{d} \quad , \quad \text{Si:} \quad \left.\begin{matrix} c = ak \\ d = bk \end{matrix}\right\} k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{ak}{bk} \quad , \quad \text{siendo } \frac{a}{b} \text{ irreductible.}$$

RELACIÓN PARTE TODO

Viene a ser la comparación geométrica de una cantidad asumida como parte, respecto a otra cantidad asumida como un todo.

Luego:

$f = \frac{a}{b}$

- a → Lo que hace de parte → es, son, representa.
- b → Lo que hace de todo → de, del, respecto.

Ejemplo:
¿Qué parte de 20 es 5?

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Importante

Halla la fracción propia e irreductible cuya suma de términos sea 14, si el doble del numerador es mayor que el denominador.
Sea f = a/b con a < b
$\Rightarrow$ a + b = 14 y 2a > b

a	b	
1	13	2(1) > 13 ×
3	11	2(3) > 11 ×
5	9	2(5) > 10 ✓

Luego: a = 5 y b = 9
$\therefore f = \frac{5}{9}$



Atención

1/4	1/4	1/4	1/4

1/6	1/6	1/6
1/6	1/6	1/6

$\Rightarrow \frac{2}{4} <> \frac{3}{6} <> \frac{1}{2}$

Por lo tanto las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes.



¿Qué fracción representa la parte no sombreada?

3S	3S
3S	S S S

$\frac{11S}{12S} = \frac{11}{12}$

¿Qué parte de 80 es 30?

$$\frac{30}{80}=\frac{3}{8}$$

¿Qué parte de 60 es 90?

$$\frac{90}{60}=\frac{3}{2}$$

¿Qué parte representa m de n?

$$\frac{m}{n}$$

FRACCIÓN GENERATRIZ

Fracción: $\frac{a}{b}$ = número decimal → exacto / periódico puro / periódico mixto

Casos:

I. Decimal exacto:

$$0,8=\frac{8}{10}$$

$$0,21=\frac{21}{100}$$

$$0,765=\frac{765}{1000}$$

$$2,71=\frac{271}{100}$$

II. Decimal periódico puro:

$$0,\widehat{3}=\frac{3}{9}$$

$$0,\widehat{76}=\frac{76}{99}$$

$$0,\widehat{854}=\frac{854}{999}$$

$$2,\widehat{7160}=2+0,\widehat{7160}$$

$$=2+\frac{7160}{9999}$$

III. Decimal periódico mixto:

$$0,2\widehat{4}=\frac{24-2}{90}$$

$$0,35\widehat{42}=\frac{3542-35}{9900}$$

$$0,1\widehat{05}=\frac{105-1}{990}$$

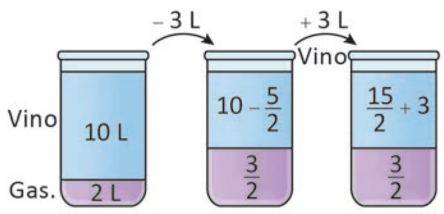
$$7,3\widehat{81}=7+0,3\widehat{81}$$

$$=7+\frac{381-3}{990}$$

Veamos algunas aplicaciones:

1. Se ha mezclado 10 L de vino con 2 L de gaseosa. Si se consumen 3 litros de la mezcla y se completa con vino, ¿cuál es la fracción de gaseosa en la nueva mezcla?

Resolución:



Se extraen 3 L de la mezcla de los cuales 5/2 L son de vino 1/2 L de gaseosa, luego se reemplaza por vino.

Piden:

$$\frac{\text{Cantidad de gaseosa}}{\text{Total de la mezcla}}=\frac{\frac{3}{2}}{12}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

2. Si: $\frac{m}{111}=0,\widehat{\left(\frac{n+1}{2}\right)(n+1)n}$; halla $m\times n$.

Resolución:

Del dato: $\frac{m}{111}=0,\widehat{\left(\frac{n+1}{2}\right)(n+1)n}$

$$\frac{m}{111}=\frac{\overline{\left(\frac{n+1}{2}\right)(n+1)n}}{999}$$

$$9\times m=\overline{\left(\frac{n+1}{2}\right)(n+1)n}$$

n debe ser impar, entonces: n = 1; 3; 5; 7

Si: n = 1 ⇒ 9m = 121 (No existe valor para m)

Si: n = 3 ⇒ 9m = 243
m = 27✓

Si: n = 5 ⇒ 9m = 365 (No existe valor para m)

Si: n = 7 ⇒ 9m = 487 (No existe valor para m)

Luego: m = 27 y n = 3

$\therefore\ m\times n=27\times 3=81$

Atención

Siendo f = $\frac{a}{b}$ una fracción irreductible, genera un número decimal inexacto periódico puro, si b no tiene como divisores a 2 ni a 5.



Nota

Siendo f = $\frac{a}{b}$ una fracción irreductible, genera un número decimal exacto, si b tiene como únicos divisores a 2 y/o 5.

Nota

Siendo f = $\frac{a}{b}$ una fracción irreductible genera un número decimal periódico mixto, si tiene como divisores a 2 y/o 5 y necesariamente a otro u otros diferentes de los anteriores.

Problemas resueltos

1 Simplifica:

$$P = 1 - \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1-x}} + \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$$

Resolución:

$$P = 1 - \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{1-x}} + \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$$

$$P = 1 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{1-x}} + \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{x}}}$$

$$P = 1-(1-x) + \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}$$

$$P = 1-1+x+\cfrac{1}{\cfrac{-1}{x-1}}$$

$$P = x-(x-1) = x-x+1$$

$\therefore P = 1$

2 Calcula cuántas fracciones existen con numerador par, que están comprendidas entre 3/7 y 11/19, si se sabe que tienen denominador 133.

Resolución:

Sea $f = \frac{N}{133}$ la fracción.

Según enunciado:

$$\frac{3}{7} < \frac{N}{133} < \frac{11}{19}$$

Homogenizando denominadores:

$$\frac{3.19}{7.19} < \frac{N}{133} < \frac{11.7}{19.7} \Rightarrow \frac{57}{133} < \frac{N}{133} < \frac{77}{133}$$

Entonces: $57 < N < 77$

Luego, piden N par:

N = 58; 60; 62; 64; 66; 68; 70; 72; 74; 76

$\therefore$ Existen 10 fracciones.

3 ¿Cuántas fracciones irreductibles propias, cuyo denominador sea 45, existen que sean mayores que 1/3?

Resolución:

Sea $f = \frac{N}{45}$ la fracción propia e irreductible.

Según el enunciado:

$$\frac{1}{3} < \frac{N}{45} < 1$$

Entonces: $\frac{1}{3} < \frac{N}{45} \Rightarrow 15 < N$ ... (I)

Además: $\frac{N}{45} < 1 \Rightarrow N < 45$ ... (II)

De (I) y (II): $15 < N < 45$

Como la fracción $\frac{N}{45}$ debe ser irreductible N y 45 deben ser primos entre sí.

Como $45 = 3^2 \times 5$, N no debe tener factor 3 ni 5.

Luego: N = 16; 17; 19; 22; 23; 26; 28; 29; 31; 32; 34; 37, 38; 41; 43; 44

$\therefore$ Existen 16 fracciones.

4 Halla el número de fracciones equivalentes a $\frac{68}{119}$ de la forma $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}$.

Resolución:

Según el enunciado:

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{68}{119}$$

Entonces: $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{4}{7}$

$$\frac{10a+b}{10b+a} = \frac{4}{7}$$

$$70a + 7b = 40b + 4a$$

$$66a = 33b$$

$$2a = b \ \& \ \frac{a}{b} = \frac{1k}{2k}$$

Si: a = 1 ⇒ b = 2
a = 2 ⇒ b = 4
a = 3 ⇒ b = 6
a = 4 ⇒ b = 8

Luego, las fracciones equivalentes serán:

$$\frac{12}{21}, \frac{24}{42}, \frac{36}{63} \text{ y } \frac{48}{84}$$

$\therefore$ Existen 4 fracciones equivalentes a: $\frac{68}{119}$

5 Si: $\frac{7}{\overline{ab}}$ genera una fracción decimal periódico puro y si $\frac{7}{\overline{ab}} = 0,\widehat{pqr}$; calcula el mayor valor de:

$a + b + p + q + r$

Resolución:

Del dato: $\frac{7}{\overline{ab}} = 0,\widehat{pqr}$

$$\frac{7}{\overline{ab}} = \frac{\overline{pqr}}{999}$$

$$\overline{ab} \times \overline{pqr} = 7 \times 999$$

$$\overline{ab} \times \overline{pqr} = 7 \times 27 \times 37$$

Si $\overline{ab} = 27 \Rightarrow \overline{pqr} = 7 \times 37 = 259$

$a = 2;\ b = 7;\ p = 2;\ q = 5;\ r = 9$

Entonces: $a + b + p + q + r = 25$

Si $\overline{ab} = 37 \Rightarrow \overline{pqr} = 7 \times 27 = 189$

$a = 3;\ b = 7;\ p = 1;\ q = 8;\ r = 9$

Entonces: $a + b + p + q + r = 28$

Como piden el mayor valor de $a + b + p + q + r$.

$\therefore\ (a + b + p + q + r)_{\text{máx.}} = 28$

6 En una fiesta de promoción hay m jovencitas más que muchachos, y cuando llegan n parejas a la fiesta, resulta que el número de los muchachos constituye los 3/8 del total de asistentes, ¿cuántos muchachos había inicialmente?

Resolución:

De los datos:

Sean:

x : cantidad de muchachos

x + m: cantidad de jovencitas

Luego, llegan n parejas.

Según el enunciado:

$$\begin{pmatrix}\text{Número de}\\ \text{muchachos}\end{pmatrix} = \frac{3}{8}\begin{pmatrix}\text{Total de}\\ \text{asistentes}\end{pmatrix}$$

$$x + n = \frac{3}{8}(2x + 2n + m)$$

$$8x + 8n = 6x + 6n + 3m$$

$$2x + 2n = 3m$$

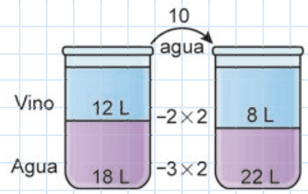
$$2x = 3m - 2n$$

$$x = \frac{3m - 2n}{2}$$

7 De un recipiente, donde hay 12 L de vino y 18 L de agua, se retiran 10 L de la mezcla y luego se reemplaza por agua. Seguidamente se retiran 15 L de la nueva mezcla y se reemplaza por agua, ¿Qué parte es el vino respecto a la cantidad de agua en la mezcla resultante?

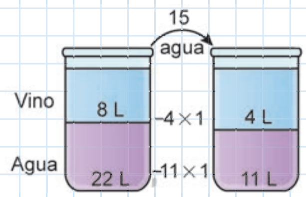
Resolución:

1.ª operación:



Se extraen 10 L de la mezcla de los cuales 4 L son de vino y 6 L son agua, luego se reemplaza por agua.

2.ª operación:



Se extraen 15 L de la mezcla de los cuales 4 L son de vino y 11 L son agua, luego se reemplaza por agua.

Piden: $\frac{\text{Cantidad de vino}}{\text{Cantidad de agua}} = \frac{4}{26} = \frac{2}{13}$

Actividades de razonamiento

1. Si:

$$R = \left[\frac{8\frac{4}{9} - 2,\widehat{8}}{3,\widehat{7} + \frac{11}{9}}\right] \div \frac{1}{10}$$

Halla $\sqrt{R}$.

A) 20/7 B) 15/7 C) 10/3 D) 4/3 E) 5/3

2. Al sumar las 11 fracciones impropias y homogéneas:

$$\frac{10}{a_1} + \frac{11}{a_2} + \frac{12}{a_3} + \ldots + \frac{20}{a_{11}}$$

Se obtiene como resultado un máximo número entero. Halla a_8.

A) 25 B) 32 C) 55 D) 33 E) 28

3. Se hace caer una bola de billar sobre una mesa desde cierta altura. Calcula esta altura, sabiendo que en el tercer rebote alcanza una altura de 54 cm y que cada rebote equivale a 3/4 de la altura de la caída anterior.

A) 96 cm B) 116 cm C) 120 cm
D) 108 cm E) 128 cm

4. De un depósito que contiene aceite se sacan las 2/3 partes de su contenido menos 40 litros, en una segunda operación se sacan los 2/5 del resto y por último se sacan los 84 litros restantes. Determina la capacidad del depósito.

A) 300 L B) 290 L C) 230 L
D) 320 L E) 250 L

5. Una persona leyó un libro de la siguiente manera: el primer día leyó 1/5 y 20 hojas más, el segundo día leyó los 2/3 del resto menos 20 hojas. Si aún quedan por leer 80 hojas, ¿cuántas hojas tiene el libro?

A) 360 B) 400 C) 250 D) 280 E) 320

6. En una conferencia de 1010 personas, entre arequipeños y cajamarquinos, se observó de los cajamarquinos lo siguiente: 2/7 eran economistas, 3/13 eran ingenieros y 5/11 médicos. Halla la cantidad de arequipeños.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 15 E) 8

7. Un comerciante vende sus artículos de la siguiente manera: 1/3 del total que tenía más 4 a S/.50 cada uno; luego vende los 3/5 de los que le quedaban a S/.40 cada uno; y finalmente vende la mitad de los que le quedaban más 4 a S/.30 cada uno, con lo cual se acabaron sus artículos. ¿Cuánto recaudó en total?

A) 2100 B) 400 C) 1800 D) 1520 E) 1450

8. A y B juntos hacen una obra en 6 horas. A trabajando solo lo hace en 10 horas. ¿En cuántas horas lo hará B si trabaja solo?

A) 8 h B) 9 h C) 12 h D) 13 h E) 15 h

9. Kike es el triple de rápido que Daniel. Si juntos pueden hacer cierto trabajo en 90 días, ¿cuánto tiempo le tomará a Daniel hacerlo solo?

A) 340 días B) 360 días C) 380 días
D) 400 días E) 420 días

10. Para una función de cine se venden 2/3 de los asientos de *mezzanine* y 4/5 de los asientos de platea. Si hay tantos asientos de *mezzanine* como de platea, ¿qué fracción del total de asientos del cine no se vendieron en esa función?

A) $\frac{4}{15}$ B) $\frac{4}{13}$ C) $\frac{7}{15}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{14}{30}$

11. Álvaro puede hacer un trabajo en 12 días y Beatriz hace el mismo trabajo en 60 días. Después de trabajar juntos durante 2 días, se retira Álvaro. ¿En qué tiempo terminará Beatriz la parte que falta?

A) 25 días B) 36 días C) 14 días
D) 48 días E) 50 días

12. Se distribuyen 300 litros de leche en tres depósitos en partes iguales. El primero se llena hasta sus 3/5 y el segundo hasta los 3/4. ¿Qué fracción del tercer depósito se llenará si su capacidad es la suma de las capacidades de las dos primeras?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

13. El café pierde 1/5 de su peso al tostarlo. Comprando café verde a 12 soles cada kilogramo, ¿a cómo deberá venderse el kilogramo de café tostado para ganar 1/10 del precio de compra?

A) S/.17,5 B) S/.14 C) S/.15,5
D) S/.16,5 E) S/.18

14. Jacky fue de compras llevando S/.360. Compró una blusa en Miraflorina, pagando 3/8 de su dinero, luego en D'Fashion compró un par de sandalias pagando 3/5 del resto. Finalmente, gastó el resto en Mediterráneo Chicken de San Isidro, comiéndose unas ricas costillas a la barbacoa. ¿Cuánto gastó en este último lugar?

A) S/.90 B) S/.45 C) S/.135
D) S/.81 E) S/.72

Claves

1. E	5. C	9. A	13. A
2. C	6. A	10. E	14. C
3. A	7. D	11. A	
4. C	8. A	12. C	

Reto



Tres tuberías A; B y C funcionando juntas pueden llenar la cuarta parte de un tanque en 2 horas; pero A y B pueden llenar la quinta parte en 2 horas y B y C pueden llenar todo en 15 horas. Halla qué tiempo empleará B en llenar la tercera parte del tanque si trabajó solo.

Rpta.: 8 horas

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. 1/5 de A es los 3/10 de B. ¿Qué parte de B es A?

   A) 1/2 B) 3/10 C) 3/5 D) 3/2 E) 6/5

2. Suma a 1/5 los 7/6 de 3/4. Si a este resultado se le multiplica por los 5/3 de 4/5 de 10, obtendremos:

   A) $14\frac{1}{3}$ B) $13\frac{1}{3}$ C) $14\frac{2}{3}$ D) 13 E) 15

3. Un alumno resuelve los 3/5 de lo que no resuelve. ¿Qué parte del examen ha resuelto?

   A) 4/7 B) 5/8 C) 4/9 D) 3/8 E) 3/7

4. Una persona toma 16 metros de una varilla. Luego toma los 2/3 del resto y observa que ambas partes tienen la misma longitud. Halla la longitud total de la varilla.

   A) 40 m B) 42 m C) 44 m D) 46 m E) 48 m

5. Una piscina está llena hasta sus 5/6 partes. Si se extraen 20 000 litros, quedaría llena hasta sus 2/3 partes. ¿Cuántos litros faltan para llenarla?

   A) 20 000 B) 30 000 C) 40 000
   D) 36 000 E) 120 000

6. Jorge gasta 1/3 del dinero que tiene y gana 1/3 de lo que le queda. Si su dinero ha disminuido en 12 dólares, ¿cuánto tenía al principio?

   A) $108 B) $120 C) $132
   D) $144 E) $54

7. En una reunión los 2/3 son mujeres y 3/5 de los varones son casados, mientras que los otros 6 son solteros. ¿Cuántas personas hay en la reunión?



   A) 45 B) 36 C) 30 D) 25 E) 15

8. Se vendió 1/5 de las entradas para una función de cine. El día de la función se vendió 1/3 de las que quedaban, quedando por vender 48 entradas. ¿Cuál es la capacidad del cine?

   A) 72 B) 84 C) 90 D) 108 E) 112

9. Los 4/5 de las aves de una granja son palomas; los 5/6 del resto son pavos y los 8 restantes son patos. ¿Cuántas aves hay en la granja?

   A) 320 B) 560 C) 420 D) 240 E) 244

NIVEL 2

10. Si 1/5 de x es igual a los 2/5 de y, ¿qué parte de (2x + y) es (x –y)?

    A) 1/5 B) 1/10 C) 7/10 D) 2/5 E) 3/10

11. Se vende 1/3 de un lote de vasos. Si se quiebran 30 y quedan todavía 5/8 del lote, ¿de cuántos vasos constaba el lote?

A) 620 B) 650 C) 670 D) 720 E) 750

12. De un total de 40 personas, se sabe que 12 son varones y el resto mujeres. De las mujeres la cuarta parte son niñas Determina qué parte de las mujeres son adultas.

A) 21/28 B) 16/25 C) 16/23
D) 22/27 E) 23/28

13. Un envase contiene 48 litros de agua. Si se retira 3/8 del contenido, luego los 2/3 del resto y por último los 3/5 del nuevo resto, ¿cuántos litros quedan?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

14. En la mitad del terreno de una hacienda se siembra pasto, en la tercera parte de lo que queda se siembra café y en las tres quintas partes del resto se siembra maíz. ¿Qué parte de la hacienda no sembrada con maíz, queda sin sembrar?



A) 1/5 B) 2/5 C) 4/5 D) 1/6 E) 2/15

15. Un fardo de tela está dividido en tres partes iguales; si los 4/7 de un extremo y los 2/5 del otro extremo son de color negro y el resto blanco, halla cuánto mide la parte de color negro, si la parte blanca mide 710 m.

A) 310 m B) 330 m C) 340 m
D) 350 m E) 360 m

16. El sueldo de un profesor se incrementa en 1/5 y luego disminuye en 1/5 de su nuevo valor. ¿Qué sucedió con el sueldo de dicho profesor?

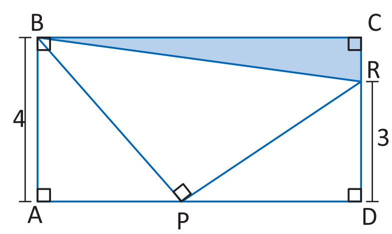
A) No varía. B) Disminuye 1/5.
C) Aumenta en 4/5. D) Disminuye en 1/25.
E) Aumenta 1/10.

17. De un tonel de 1400 L de vino se extrae 1/4 de lo que no se extrae, luego 1/4 de lo que ya se había extraído. ¿Cuánto se extrajo en total?

A) 200 L B) 250 L C) 280 L D) 350 L E) 430 L

NIVEL 3

18. ¿Qué parte del área total, representa el área de la región sombreada? (BP = PR)



A) 1/3 B) 1/5 C) 2/9 D) 1/8 E) 1/7

(19) ¿Cuántas fracciones propias existen de términos impares consecutivos que sean menores que 0,83?

A) 9 B) 7 C) 5 D) 4 E) 6

(20) Disminuyendo una misma cantidad a los dos términos de la fracción x/y, se obtiene la fracción original invertida, ¿cuál es aquella cantidad?

A) $x - y$ B) $x + y$ C) $x \div y$ D) $x \cdot y$ E) $y - x$

(21) Una pelota pierde las dos quintas partes de su altura en cada rebote que da, si se le deja caer desde un metro de altura. ¿Qué altura alcanzará después del tercer rebote?

A) 21,60 cm B) 12,60 cm C) 21 cm
D) 32,80 cm E) 26,10 cm

(22) La mitad de lo que me queda de agua en la botella es igual a la tercera parte de lo que ya tomé. Si tomo la cuarta parte de lo que me queda, ¿qué fracción de toda el agua me habré tomado?

A) 3/10 B) 3/7 C) 2/3 D) 7/10 E) 1/3

(23) Sabiendo que perdí 2/3 de lo que no perdí, luego recupero 1/3 de lo que no recupero y tengo entonces 42 soles. ¿Cuánto me quedaría luego de perder 1/6 de lo que no logré recuperar?

A) S/. 36 B) S/. 39 C) S/. 42
D) S/. 48 E) S/. 60

(24) Se tiene un recipiente de 8 litros, con 5 litros de alcohol y el resto con agua. Se utiliza una cuarta parte de la mezcla y se reemplaza con agua, luego se utiliza la tercera parte y se reemplaza con agua. ¿Cuántos litros de alcohol quedan?

A) 1,5 L B) 2 L C) 2,5 L
D) 3,5 L E) 3 L

(25) Reduce :

$$E = \frac{16}{25} + \frac{1616}{2525} + \frac{161616}{252525} + \ldots + \underbrace{\frac{1616\ldots16}{2525\ldots25}}_{50\text{ cifras}}$$

A) 1 B) 16 C) 25
D) 31 E) 50

(26) Dada la siguiente fracción propia $\frac{x+1}{2x-1}$; halla la suma de valores de x que cumplen dicha condición, sabiendo que es un número entero menor que 7.

A) 17 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

Claves

NIVEL 1	8. C	15. C	22. D
1. D	9. D	16. D	23. B
2. A	NIVEL 2	17. D	24. C
3. D	10. A	NIVEL 3	25. B
4. A	11. D	18. D	26. E
5. C	12. A	19. C	
6. A	13. A	20. B	
7. A	14. D	21. A	

Tanto por ciento

Atención

Un tanto por ciento tiene su equivalente con un número racional positivo y viceversa.

Ejemplo:

$300\% = \frac{300}{100} = 3$

Esto significa que el 300% de una cantidad es equivalente al triple de la cantidad, es decir:

$300\%C = 3C$



DEFINICIÓN

Si dividimos una cantidad en 100 partes iguales y tomamos cierto número m de esas partes, nos estamos refiriendo entonces al tanto por ciento; luego:

← Total = 100 partes iguales →

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

m partes

$$m\% = \frac{m}{100}$$

Ejemplos:

El $20\% = \frac{20}{100}$ El $32\% = \frac{32}{100}$ El $300\% = \frac{300}{100}$ El $500\% = \frac{500}{100}$

TANTO POR CIENTO DE UNA CANTIDAD

$$\text{El } m\% \text{ de } N = \frac{m}{100} \times N$$

Ejemplos:

El 28% de 150 $= \frac{28}{100} \times 150 = 42$

El 118% de 300 $= \frac{118}{100} \times 300 = 354$

El 25% del 30% de 120 $= \frac{25}{100} \times \frac{30}{100} \times 120 = 9$

El $(a+b)\%$ de $(a-b) = \frac{a+b}{100}(a-b) = \frac{a^2-b^2}{100}$

Nota

Toda cantidad representa el 100% de sí misma, es decir:

$C = 100\%C$

RELACIÓN PARTE - TODO

Es la comparación de una cantidad (a la cual le llamamos parte) respecto a otra cantidad (a la cual le llamamos todo).

$$\frac{\text{Lo que hace de parte}}{\text{Lo que hace de todo}} \times 100\%$$

Ejemplos:

¿Qué tanto por ciento de 300 es 30?

$\frac{30}{300} \times 100\% = 10\%$

¿Qué tanto por ciento es 50 de 40?

$\frac{50}{40} \times 100\% = 125\%$

¿Qué tanto por ciento es 96 de 80?

$\frac{96}{80} \times 100\% = 120\%$

¿Qué tanto por ciento es $a - b$ respecto de $a^2 - b^2$?

$$\frac{a-b}{a^2-b^2} \times 100\% = \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} \times 100\%$$

$$= \left(\frac{100}{a+b}\right)\%$$

Nota

Sea "N" el número

$63\%N + 31\%N = 94\%N$

$28\%N + 47\%N = 75\%$

$68\%N - 35\%N = 33\%N$

$85\%N - 19\%N = 66\%N$

$N + 95\%N = 195\%N$

$N - 11\%N = 89\%N$

DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

Ejemplos:

1. ¿A qué descuento único equivalen 3 descuentos sucesivos del 20%, 30% y 50%?

Resolución:

$$\begin{matrix} -20\% & -30\% & -50\% \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{80}{100} & \times \frac{70}{100} & \times 50\% = 28\% \end{matrix}$$

$\therefore$ Descuento único: 100% – 28% = 72%

2. ¿A qué aumento único equivale 3 aumentos sucesivos del 20%, 25% y 40%?

Resolución:

$$\begin{matrix} +20\% & +25\% & +40\% \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{120}{100} & \times \frac{125}{100} & \times 140\% = 210\% \end{matrix}$$

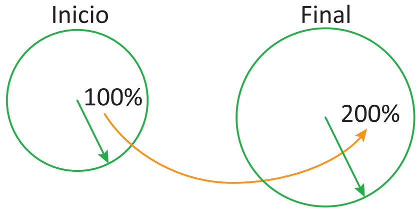
$\therefore$ Aumento único: 210% – 100% = 110%

VARIACIÓN PORCENTUAL

Ejemplo:

Si el radio de un círculo aumenta en 100%, ¿en qué porcentaje aumenta su área?

Resolución:



$A_{inicio} = \pi(100\%)^2 = \pi \cdot 100\%$

$A_{final} = \pi(200\%)^2 = \pi \cdot 400\%$

+ 300%

$\therefore$ El área aumenta en 300%

APLICACIONES COMERCIALES

Un comerciante compra un electrodoméstico en S/.500 (precio de costo: P_C) y decide ofrecerlo a sus clientes en S/. 600 (precio fijado: P_F). Pero lo vende en S/.580 (precio de venta: P_V), es decir hace una rebaja de (S/.600 – S/.580 = S/.20) y obtiene una ganancia de S/.80

Precio fijado: S/.600

Precio de costo S/.500	Ganancia S/.80	Rebaja S/.20

Precio de venta: S/.580

Se observa que: $P_V = P_C + G$

También: $P_V = P_F - R$

Nota

Denotamos con (+) cuando nos referimos a aumentos y con (–) cuando nos referimos a descuentos.

Ejemplo:

+ 25% → Aumento

– 30% → Disminución

Observación

En este ejemplo se observa que las constantes como π se pueden dejar de colocar en el cálculo del área inicial y final, y el resultado de la variación porcentual es el mismo. Es decir que la variación del área solo depende de r^2.



Nota

- El precio fijado es llamado también precio de lista o precio de venta al público.
- El tanto por ciento de la ganancia se toma con respecto a precio de costo, así también el tanto por ciento del descuento se toma con respecto al precio fijado.

Problemas resueltos

1 El 0,10% del 25% de los 3/5 de una cantidad es 0,6. Halla dicha cantidad.

Resolución:

Sea N la cantidad.
Del enunciado se tiene:

$$\frac{10}{10000} \times \frac{25}{100} \times \frac{3}{5} \times N = \frac{6}{10}$$

$$N = 4000$$

2 ¿Qué porcentaje de $(a^2 - ab + b^2)$ es $(a^3 + b^3)$?

Resolución:

Aplicando la relación parte-todo.

$$\frac{\text{Lo que hace de parte}}{\text{Lo que hace de todo}} \times 100\%$$

Reemplazando:

$$\frac{a^3 + b^3}{(a^2 - ab + b^2)} \times 100\%$$

$$\frac{(a + b)(a^2 - ab + b^2)}{(a^2 - ab + b^2)} \times 100\% = 100(a + b)\%$$

3 Al aumentar el precio de entrada en el estadio en un 20%, la asistencia bajo en un 10%, ¿qué pasó con la recaudación?

Resolución:

El precio de entrada aumentó en 20%, ahora será $(100 + 20)\% = 120\%$

La asistencia disminuyó en 10%, ahora será: $(100 - 10)\% = 90\%$

Luego: recaudación = precio × asistencia

Reemplazando:
$$\text{Recaudación} = 120\% \times 90\%$$
$$= 108\%$$

Finalmente, la recaudación aumentó en:
$(108 - 100)\% = 8\%$

4 Un boxeador decide retirarse cuando tenga un 90% de triunfos. Si hasta el momento ha peleado 100 veces y ha obtenido 85 victorias. ¿Cuántas peleas como mínimo debe realizar para poder retirarse?

Resolución:

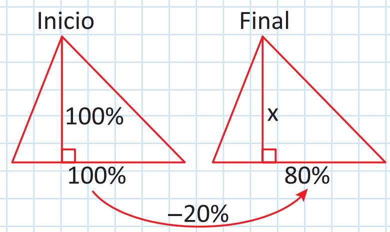
Sea x el número de peleas a realizar.
Total de peleas: $100 + x$
Victorias: $85 + x$
Derrotas: 15
Luego: victorias = 90% (total)

$$85 + x = \frac{90}{100}(100 + x)$$
$$850 + 10x = 900 + 9x$$
$$x = 50$$

∴ Debe realizar 50 peleas.

5 La base de un triángulo disminuye en 20%, ¿en qué tanto por ciento debe aumentar su altura para que su área no varíe?

Resolución:



$A_{inicio} = 100\% \,.\, 100\% = 100\%$ $\quad A_{final} = 80\% \,.\, x$

Por dato:
$$100\% = 80\%x$$
$$x = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 125\%$$

∴ La altura debe aumentar en:
$125\% - 100\% = 25\%$

6 Si x aumenta en 44%. ¿Qué ocurre con $\sqrt{x}$?

Resolución:

Si x aumenta en 44% ahora será:
$(100 + 44)\% = 144\%$

Luego: $\sqrt{x} = \sqrt{144\%}$

$$= \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{12 \times 10}{10 \times 10}$$
$$= \frac{120}{100} = 120\%$$

∴ $\sqrt{x}$ aumenta en:
$(120 - 100)\% = 20\%$

7 Se vende un objeto en S/.1040 ganando el 50% del 80% del 10% del costo. ¿A cuánto debería haberse vendido para ganar el 20% del 25% del 60% del costo?

Resolución:

Nos piden: P_C

Datos:

$P_V = S/.1040$

$G = 50\% \times 80\% \times 10\%P_C$

Aplicamos: $P_V = P_C + G$

Reemplazamos:

$P_V = P_C + 50\% \times 80\% \times 10\%P_C$

$1040 = P_C + 4\%P_C$

$1040 = 104\%P_C$

$P_C = 1000$

Ahora el nuevo P_V será:

$P_V = P_C + 20\%\ 25\%\ 60\%\ P_C$

$P_V = P_C + 3\%P_C$

$P_V = 103\%P_C$

$P_V = \dfrac{103}{100} \times 1000$

$P_V = 1030$

8 ¿Qué precio de lista debe fijar un comerciante para un artículo, si al rebajar el 20% obtiene una utilidad del 30% de su costo, el cual fue de S/.5000?

Resolución:

Nos piden: P_F

Datos:

$D = 20\%\ P_F$

$G = 30\%\ P_C$

Aplicamos: $P_F = P_V + D$

Entonces:

$P_F = P_C + G + D$

$P_F = P_C + 30\%P_C + 20\%P_F$

$80\%P_F = 130\%P_C$

$P_F = \dfrac{130}{80} \times 5000$

$P_F = 8125$

9 El precio de lista de un artículo es el doble del precio de costo. Halla el precio de venta del artículo si se vendió haciéndole una rebaja del 10% y obteniendo una ganancia de S/.400.

Resolución

Nos piden: P_V

Datos:

$P_L = 2P_C$

$D = 10\%P_L$

$G = S/.\ 400$

Aplicamos: $P_L = P_V + D$

Entonces: $P_L = P_C + G + 10\%P_L$

$90\%\ P_L = P_C + 400$

$90\%\ 2P_C = P_C + 400$

$180\%\ P_C = P_C + 400$

$80\%\ P_C = 400$

$P_C = S/.500$

Luego:

$P_V = P_C + G$

$P_V = 500 + 400$

$P_V = 900$

10 Si gasto el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedaría, perdería S/.312, ¿cuánto tengo?

Resolución:

Sea S/.100k lo que tengo.

Si gastara = S/.30k

Me quedaría	Si ganara	Perdería
70k	19,6k	10,4k

$\dfrac{28}{100}(70k)$ → 19,6k

Según el enunciado perdería S/.312.

Entonces:

$10{,}4k = 312 \Rightarrow k = 30$

$\therefore$ Tengo: $100(30) = 3000$

Actividades de razonamiento

1. ¿A cómo debo vender lo que me costó S/.270 para ganar el 10% del precio de venta, más el 40% del costo?

A) S/.400 B) S/.300 C) S/.200
D) S/.350 E) S/.420

2. Dos blusas son vendidas en S/.60 cada una. En una se gana el 20% y en otra se pierde 20%. ¿Cuánto se ganó o se perdió en el negocio?

A) S/.10 B) S/.5 C) S/.8
D) S/.20 E) S/.7

3. En una granja, el 40% son gallinas. Si se ha vendido el 20% de gallinas, ¿en qué tanto por ciento ha disminuido el número de aves?

A) 7% B) 6% C) 10% D) 8% E) 9%

4. Halla el $(a-b)\%$ del 20% de $\left(\frac{1}{a-b}\right)$ de $\frac{a^2-b^2}{(a-b)(a+b)}$ de 6000.

A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 14

5. En una fábrica el precio de un artículo es de S/.15. Un comerciante adquiere 5 de tales artículos por los que le hacen el 20% de descuento y luego los vende obteniendo por ellos S/.80. ¿Qué tanto por ciento del precio de venta de cada artículo está ganando?

A) 50% B) 40% C) 10%
D) 25% E) 30%

6. En una fiesta hay 16 personas, de las cuales el 25% son mujeres. Luego llegan más mujeres a la fiesta, de tal manera que los hombres son ahora el 60%. ¿Cuántas mujeres llegaron a la fiesta?

A) 2 B) 5 C) 3 D) 1 E) 4

7. La base de un triángulo aumenta en 20% y la altura disminuye en 10%. ¿En qué tanto por ciento varía el área?

A) 8% B) 7% C) 6% D) 12% E) 4%

8. ¿A cuánto equivale el 30% menos, del 20% más, de la veinteava parte de 2000?

A) 29 B) 48 C) 45 D) 84 E) 62

9. A un concierto asistieron 7500 personas. Si el 87% de las mujeres y el 12% de los hombres se retiran, el 12% de los que quedan serían mujeres. ¿Cuántos varones se han retirado?

A) 468 B) 430 C) 247
D) 520 E) 258

10. ¿En qué porcentaje se debe incrementar al precio de un producto, para seguir ganando lo mismo, pero efectuando un descuento del 20%?

A) 30% B) 25% C) 17%
D) 20% E) 15%

11. Si el perímetro de un cuadrado aumenta en 20%, ¿en qué porcentaje aumenta el área de la circunferencia inscrita?

A) 12% B) 59% C) 30%
D) 20% E) 44%

12. Si la base de un triángulo disminuye en un 20% y el área no varía. ¿En qué tanto por ciento varía su altura?

A) Disminuye 10% B) Aumento 30%
C) Aumenta 15% D) Aumenta 25%
E) Aumenta 40%

13. En el ciclo semestral, el 40% postulan a la UNI y de estos el 60% son mujeres. De los que no postulan a la UNI, el 90% son varones. ¿Qué tanto por ciento del total son mujeres?

A) 30% B) 20% C) 25%
D) 35% E) 40%

14. Tres aumentos sucesivos del 5%; 18% y 26% equivalen a un único aumento de z%. Tres descuentos sucesivos del 4%; 15% y 20% equivalen a un único descuento del w%. Calcula: 5z + 2w

A) 380 B) 275,3 C) 350
D) 350,01 E) 325

Claves

1. E	5. D	9. A	13. A
2. B	6. E	10. B	14. D
3. D	7. A	11. E	
4. A	8. D	12. D	

Reto



En la siguiente expresión:

$$E = \frac{(\pi H)Y^2\sqrt{Z}}{\pi^3 P}$$

Si Z disminuye en 19%, Y aumenta en 40%, y P disminuye en 30%. ¿En qué porcentaje varía E?

Rpta.: aumenta en 152%

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. En una reunión había 25 parejas bailando, además 30 hombres y 20 mujeres sentados.

   Indica verdadero (V) o falso (F):

   El 45% de los asistentes son mujeres. ( )
   El 50% de los que no bailan son los hombres que bailan. ( )
   Los que bailan son el 100% de los que no bailan. ( )

   A) VFV B) VVF C) VVV D) FVF E) FFF

2. Un boxeador decide retirarse cuando tenga un 80% de triunfos. Si hasta el momento ha peleado 100 veces y ha obtenido 75 victorias, ¿cuántas peleas como mínimo debe realizar para poder retirarse?

   A) 5 B) 10 C) 20 D) 25 E) 30

3. Un ómnibus tiene 70 pasajeros, de los cuales el 70% están sentados, de las mujeres el 80% y únicamente 10% de los hombres. ¿Cuántos hombres viajan en el ómnibus?

   A) 10 B) 15 C) 12 D) 22 E) 26

4. Ayer tuve S/.69 y gasté el 38% de lo que no gasté. ¿Cuánto no gasté?

   A) S/.50 B) S/.70 C) S/.80
   D) S/.90 E) S/.60

5. Dos descuentos sucesivos del 20% y 30% seguidos por un incremento de 50%, ¿a qué único aumento o descuento equivale?

   A) –16% B) +2% C) –12%
   D) +16% E) –8%

6. En la venta de un bien, los insumos y la mano de obra representan el 70% del precio de venta; la mano de obra es el 40% de los insumos. ¿Qué porcentaje del precio de venta representan los insumos?

   A) 50% B) 40% C) 20% D) 30% E) 60%

7. Dos artículos se vendieron al mismo precio. En el primero se ganó el 20% del costo y en el segundo el 10% del precio de venta. Si uno de estos artículos costó S/.60 más que el otro, ¿a qué precio se vendió cada artículo?

   A) S/.300 B) S/.1200 C) S/.600
   D) S/.900 E) S/.500

8. Un estudiante pregunta en una librería qué descuento le pueden hacer sobre el precio de un libro, y le responden que 10%; va a otra librería y el precio del libro es el mismo, pero lo compra con un descuento del 15%, ahorrándose así S/.15. ¿Cuánto costaba el libro?

   A) S/.225 B) S/.235 C) S/.240
   D) S/.270 E) S/.300

9. Un vendedor hace un descuento de 10% a una mercadería, sobre el precio de venta al público, a un cliente; este se acerca al gerente y consigue un descuento del 10% sobre lo facturado por el vendedor. Si se dirige a la caja y paga S/.1620, ¿cuál es el precio de venta al público?

   A) S/.2025 B) S/.2000 C) S/.2500
   D) S/.20 250 E) S/.20 000

10. De una reunión se retiraron 30 hombres y 36 mujeres. El 12% de los hombres que quedaron, equivale al 38% del número de mujeres que quedaron. ¿Qué porcentaje son hombres?

A) 48% B) 76% C) 54% D) 36% E) 82%

NIVEL 2

11. Se compra dos artefactos de igual precio. Al venderlos, en uno se gana el 15% y en el otro se pierde el 5%. Si en total se ganó S/. 580, determina el precio de compra de cada artefacto.

A) S/.8000 B) S/.8500 C) S/.5800
D) S/.10 000 E) S/.4250

12. José después de haber perdido S/.200 le queda el 80% del dinero que tenía. ¿Qué cantidad debe recibir José para tener S/.1200?

A) S/.200 B) S/.250 C) S/.300
D) S/.500 E) S/.400

13. Si: A es el 21 por mil de 800.
B es el 7 por 6 de 132.
C es el 5/7% de 3500.

Luego, indica verdadero (V) o falso (F):
( ) $A < B$ ( ) $2A + 5C > B$
( ) $A + C < B$ ( ) $B > A > C$

A) FFFF B) VFVF C) VFFF
D) VVVF E) VVVV

14. Un contratista recarga el precio de una casa en el 25% de su valor. Si al venderla descuenta el 12% a un comprador, ¿cuál es el porcentaje de utilidad?

A) 12% B) 10% C) 13%
D) 8,5% E) 8%

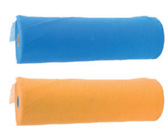
15. Dos corbatas se venden a S/. 182 cada una. En la primera corbata se percibe una ganancia del 30% y en la segunda una pérdida del 30%. El resultado de la transacción comercial fue:

A) Ganancia de S/.60. B)Pérdida de S/.60.
C) Ganancia de S/.36. D) Pérdida de S/.36.
E) Ni se gana ni se pierde.

16. Un cajón contiene 4% de huevos rotos del total. Si el 5% de la diferencia entre este total y los rotos es 36, en el cajón hay:

A) 750 huevos B) 960 huevos
C) 400 huevos D) 360 huevos
E) 720 huevos

17. Dos piezas de tela se vendieron cada una en 240 soles. En una se ganó el 20% y en la otra se perdió el 20%. En toda la transacción se ganó o perdió. ¿Cuánto?



A) Ganó S/.20 B) Perdió S/.20
C) Ganó S/.10 D) Perdió S/.10
E) Perdió S/.15

(18) Indica verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones:

Dos descuentos sucesivos del 20% y 30% equivalen a un descuento único del 50%. ( )

Dos aumentos sucesivos del 20% y 30% equivalen a un aumento único del 56%. ( )

En un juego de cartas, una persona pierde en la primera partida el 50% de lo que tenía. En una segunda partida, vuelve a perder el 20% de lo que le quedaba y en una tercera partida, gana el 80% de lo que tenía al comenzar dicha partida. Entonces se retira perdiendo el 28% de lo que tenía en un inicio. ( )

A) FVV B) VFV C) FVF
D) VVV E) VVF

(19) Un granjero de pollos tiene 1000 huevos. El 4% de estos se rompen y se encuentra que el 5% de los restantes están defectuosos. ¿Cuántos huevos pueden venderse en el mercado?



A) 300 B) 912 C) 738
D) 684 E) 673

(20) Inicialmente en una fiesta el 75% eran hombres y el resto mujeres, en el transcurso de la fiesta llegaron 60 hombres y 140 mujeres, siendo entonces el número de hombres 65% de los asistentes. ¿Cuántas personas habían inicialmente en la fiesta?

A) 400 B) 600 C) 700
D) 800 E) 900

NIVEL 3

(21) Jaimito compró 20 artículos de tipo A, y los vendió ganando el 10%, con el importe de esta venta compró 60 artículos de tipo B y los vendió ganando el 15%, con el importe de esta última venta compró 828 artículos del tipo C, al precio de 99 soles la docena. ¿Cuánto le costaron los 20 artículos de tipo A?

A) S/.480 B) S/.450 C) S/.540
D) S/.4500 E) S/.5400

(22) Un objeto tenía un precio de S/.800 y lo he adquirido ahorrando la suma de S/.296 después de que me hicieron 2 descuentos sucesivos, uno de ellos del 30% y el otro no lo recuerdo. ¿Cuál fue este segundo descuento sucesivo?

A) 20% B) 10% C) 30%
D) 40% E) 75%

(23) Si el radio de un cono se incrementa en 10%, ¿en qué porcentaje varía su volumen?

A) 11% B) 15% C) 17% D) 21% E) 23%

(24) José compró un televisor, el cual decide venderlo recargándole el precio de costo en 30%. Al momento de venderlo a su amigo Jorge, le hizo una rebaja del 25% pensando que con esta rebaja iba a vender al precio que había comprado, sin embargo quedó perjudicado en S/.32,5. ¿A qué precio lo vendió?

A) S/.1350,5 B) S/.1300 C) S/.1150
D) S/.1250,5 E) S/.1267,5

(25) Un comerciante redujo en un 20% el precio de venta de cada uno de sus artículos. ¿En qué porcentaje aumentaron sus ventas si se sabe que sus ingresos aumentaron en 20%?

A) 20% B) 30% C) 40%
D) 50% E) 55%

(26) A Brenda al comprar una blusa deberían haberle hecho un descuento del 20%, mientras que a Carmen al comprar un pantalón deberían haberle hecho un descuento del 10%. El vendedor se equivoca y hace el descuento al revés, por lo que Brenda paga S/.2 más y Carmen S/.5 menos. ¿Cuál es la diferencia entre lo que pagó Carmen y lo que pagó Brenda?



A) S/.20 B) S/.22 C) S/.25
D) S/.29 E) S/.30

(27) Si 20 litros de agua contienen 15% de sal, ¿cuántos litros de agua se deben evaporar para que la nueva solución contenga 20% de sal?

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 2

(28) Si la base de un triángulo aumenta en 20% y su altura disminuye 20%. ¿Cómo varía su área?

A) Aumenta 5%. B) Disminuye 7%.
C) Aumenta 2%. D) Aumenta 4%.
E) Disminuye 4%.

(29) Si R aumenta 20% y M disminuye 75%, ¿en qué porcentaje varía B?

$$B = \frac{3M^{1/2}R^2}{4}$$

A) Disminuye 28%. B) Disminuye 72%.
C) Aumenta 5%. D) Aumenta 28%.
E) Aumenta 72%.

(30) La base de un triángulo disminuye en 1% y la altura aumenta en 1%, entonces el área del triángulo:

A) Aumenta 1% B) Aumenta 0,1%
C) Aumenta 0,5% D) Disminuye en 0,01%
E) Disminuye 0,1%

Claves

NIVEL 1
1. C
2. D
3. A
4. A
5. A
6. A
7. D
8. E
9. B
10. B

NIVEL 2
11. C
12. E
13. D
14. B
15. D
16. A
17. B
18. C
19. B
20. C

NIVEL 3
21. E
22. B
23. D
24. E
25. D
26. B
27. C
28. E
29. A
30. D

Magnitudes proporcionales

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Ejemplo:
En una carpintería 6 obreros pueden fabricar 12 mesas, comparemos las magnitudes.

n.° de obreros	n.° de mesas
6	12
12 (×2)	24 (×2)
18 (×3)	36 (×3)
3 (÷2)	6 (÷2)

$$\frac{\text{n.° de obreros}}{\text{n.° de mesas}} = \frac{6}{12} = \frac{12}{24} = \frac{18}{36} = \frac{3}{6} = \text{cte}.$$

El cociente de cada par de valores correspondientes es el mismo, es decir el cociente es constante.
Por lo tanto, el número de obreros es directamente proporcional al número de mesas.

Conclusión:
Si dos magnitudes son directamente proporcionales entonces el cociente de sus valores correspondientes es constante.

MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Ejemplo:
Un automóvil viaja a 20 km/h y demora 24 min en llegar a su destino.
Comparemos las magnitudes.

Velocidad (km/h)	Tiempo (min)
20	24
40 (×2)	12 (÷2)
60 (×3)	8 (÷3)
10 (÷2)	48 (×2)

$$\text{Velocidad} \times \text{Tiempo} = 20 \times 24 = 40 \times 12 = 80 \times 8 = 10 \times 48 = \text{cte}.$$

El producto de cada par de valores correspondientes es el mismo, es decir el producto es constante.
Por lo tanto, la velocidad es inversamente proporcional al tiempo.

Conclusión:
Si dos magnitudes son inversamente proporcionales entonces el producto de sus valores correspondientes es constante.

COMPARACIÓN SIMPLE

Cuando en el problema intervienen solo dos magnitudes.
Ejemplo:
Cierto número de ovejas son alimentadas con 30 kg de pasto. Pero si disminuimos en 5 el número de ovejas, entonces se necesitan solamente 20 kg de pasto. Halla el número de ovejas.

Atención

Gráficamente:

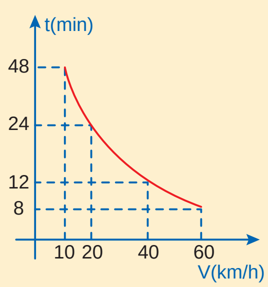


- La gráfica de dos magnitudes DP es una recta (o parte de ella), que pasa por el origen de coordenadas.
- En cualquier punto de la gráfica excepto en el origen de coordenadas, el cociente de cada par de valores resulta una constante.



Atención

Gráficamente:



- La gráfica de dos magnitudes IP es una rama (o parte de ella) de una hipérbola equilátera.
- En cualquier punto de la gráfica el producto de cada par de valores resulta una constante.

Sea "x" el número de ovejas

n.° de ovejas	kg de pasto
n	30
n – 5	20

(n.° de ovejas) DP (kg de pasto) $\Rightarrow \dfrac{n}{n-5} = \dfrac{30}{20}$

$$2n = 3n - 15$$
$$n = 15$$

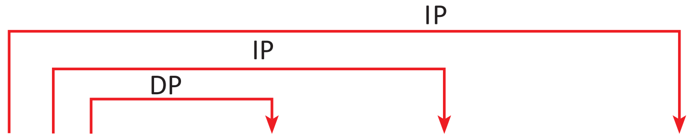
$\therefore$ El número de ovejas es 15.

COMPARACIÓN COMPUESTA

Cuando en el problema intervienen 3 o más magnitudes.

Ejemplo:
5 obreros construyen 12 muros en 30 días. ¿Cuántos obreros doblemente eficientes se necesitarán para construir 60 muros en 25 días?

Resolución:



n.° de obreros	Muros	Días	Eficiencia
5	12	30	1
x	60	25	2

$$\frac{x.25.2}{60} = \frac{5.30.1}{12}$$

$$n = 15$$

A continuación veamos algunos ejemplos de magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Magnitud	VS	Magnitud
n.° de obreros	DP	obra
n.° de obreros	IP	tiempo
n.° de obreros	DP	dificultad
n.° de obreros	IP	eficiencia
obra	DP	tiempo
obra	IP	dificultad
obra	DP	eficiencia

En general:
Sean las magnitudes A; B; C y D. De las cuales elegimos la magnitud A como referencia y las relacionamos con las otras.

A es DP a B (C y D constantes)

A es IP a C (B y D constantes) $\Rightarrow \boxed{\dfrac{A \times C \times D}{B} = \text{constante}}$

A es IP a D (B y C constantes)

Nota

También cuando las magnitudes son IP

Ejemplo:
Un grupo de obreros demora 15 días en hacer una obra. Pero si el número de obreros aumentase en 10, se emplearían 5 días. El número de obreros es:

Resolución:

n.° de obreros	días
n	15
n + 10	5

n.° de obreros IP días
$\Rightarrow 15n = 5(n + 10)$
$3n = n + 10$
$n = 5$
$\therefore$ El número de obreros es 5.

Recuerda

- Si hay más obreros se demorarán menos días.
  $\Rightarrow$ n.° de obreros IP Días
- Si hay más muros se necesitarán más obreros.
  $\Rightarrow$ n.° de obreros DP Muros
- Si hay más eficiencia se emplearán menos obreros.
  $\Rightarrow$ n.° de obreros IP Eficiencia



Importante

- Si: A DP B $\Rightarrow$ B DP A
  A IP B $\Rightarrow$ B IP A
- Si: A DP B $\Rightarrow A^n$ DP B^n
  A IP B $\Rightarrow A^n$ IP B^n
- Si: A DP B $\Rightarrow$ A IP $\frac{1}{B}$
  A IP B $\Rightarrow$ A DP $\frac{1}{B}$

Problemas resueltos

1 Se sabe que A^3 es DP a $\sqrt{B}$ e IP a C^2, cuando A = 4, B = 64 y C = 12. ¿Cuánto valdrá B, cuando A = 2 y C = 6?

Resolución:

Según los datos: $\dfrac{A^3C^2}{\sqrt{B}} = \text{cte}.$

En el problema: $\dfrac{4^3 \times 12^2}{\sqrt{64}} = \dfrac{2^3 \times 6^2}{\sqrt{B}}$

$$\frac{64 \times 144}{8} = \frac{8 \times 36}{\sqrt{B}}$$

$$\sqrt{B} = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{1}{16}$$

2 A es DP a B^2 e IP a $\sqrt{C}$, cuando A = 150, B = 10 y C = 16. Halla A cuando B = 14 y C = 49.

Resolución:

Según el enunciado: $\dfrac{A\sqrt{C}}{B^2} = \text{cte}.$

Entonces: $\dfrac{150 \times \sqrt{16}}{10^2} = \dfrac{A \times \sqrt{49}}{14^2}$

$$\frac{150 \times 4}{100} = \frac{7A}{196} \Rightarrow A = 14 \times 12$$

$$A = 168$$

3 Una cuadrilla de 120 trabajadores pueden culminar un puente en 36 días. Al cabo del vigesimoquinto día la doceava parte de la cuadrilla se retira. ¿Con cuántos días de retraso concluirán la obra?

Resolución:

Sabemos que: n.° trabajadores IP n.° días

Luego: n.° trabajadores × n.° días = cte.

Sea "x" el número de días de retraso, luego la suma de las partes de la obra es igual al total de la obra.

120 trabajadores	36 días
120 trabajadores 25 días	110 trabajadores 11 + x días

La doceava parte (10), se retira.

$$120 . 25 + 110(11 + x) = 120 . 36$$
$$12 . 25 + 11(11 + x) = 12 . 36$$
$$11 (11 + x) = 12 . 11$$
$$11 + x = 12$$
$$x = 1 \text{ día de retraso}$$

4 Una obra puede realizarse en 30 días, empleando 15 obreros trabajando 8 h/d. Después de 3 días de trabajo se acordó terminar 12 días antes. ¿Cuántos obreros más debieron emplearse, teniendo en cuenta que se aumentó en una hora el trabajo diario?

Resolución:

Sabemos que:
n.° obreros IP n.° días
n.° obreros IP h/d
n.° obreros × n.° días × h/d = cte.
Sea "x" el número de obreros que se emplearon.

15 obreros 30 días 8 h/d

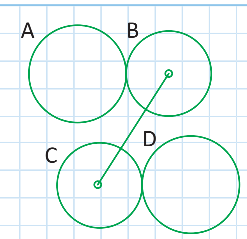
15 obreros 3 días 8 h/d	(15 + x) obreros 15 días 9 h/d

Una hora más por día.

$$15 . 3 . 8 + (15 + x) . 15 . 9 = 15 . 30 . 8$$
$$8 + 3(15 + x) = 80$$
$$3(15 + x) = 72$$
$$15 + x = 24$$
$$x = 9 \text{ obreros más}$$

5 Una rueda "A" de 80 dientes engrana con otra rueda "B" de 50 dientes. Fijo al eje B hay otra rueda "C" de 15 dientes que engrana con una rueda "D" de 40 dientes. Si "A" da 120 vueltas por minuto. ¿Cuántas vueltas dará la rueda D?

Resolución:

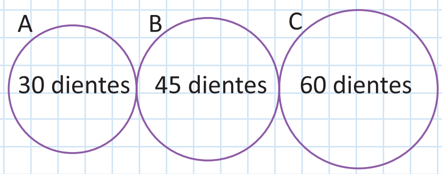


Sabemos que n.° dientes $\times$ n.° vueltas = cte.

$$d_A \times V_A = d_B \times V_B$$
$$80 \,.\, 120 = 50 \,.\, V_B$$
$$V_B = 192 \Rightarrow V_C = 192$$
$$d_C\, V_C = d_D \,.\, V_D$$
$$15 \times 192 = 40 \times V_D$$
$$V_D = 72$$

6 Se tiene una rueda "A" de 30 dientes que engrana con otra "B" de 45 dientes, y esta a su vez engrana con otra "C" de 60 dientes. Si en un determinado tiempo la diferencia del número de vueltas que dan las ruedas "A" y "C" es 180. ¿Cuántas vueltas ha dado la rueda "B"?

Resolución:



Sabemos que: n.° dientes $\times$ n.° vueltas = cte.

En el problema:

$$\frac{30 \times V_A}{180} = \frac{45 \times V_B}{180} = \frac{60 \times V_C}{180}$$

$$\frac{V_A}{6} = \frac{V_B}{4} = \frac{V_C}{3} = k$$

Por dato: $V_A - V_C = 180$

$$6k - 3k = 180$$
$$3k = 180 \Rightarrow k = 60$$

$\therefore V_B = 4(60) = 240$ vueltas

7 El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante que se compró en S/.25 000 se rompe en dos pedazos cuyos pesos están en la razón de 2 a 3. ¿Cuál es la pérdida que se sufre?

Resolución:

$$\frac{\text{Precio}}{\text{Peso}^2} = k; \quad \frac{P_T}{5^2} = \frac{P_1}{2^2} = \frac{P_2}{3^2} = k$$

$$\frac{25\,000}{25} = \frac{P_1}{4} = \frac{P_2}{9} \Rightarrow k = 1000$$

Luego: $P_1 + P_2 = (4 + 9)1000 =$ S/.13 000

$\therefore$ Pérdida = S/.25 000 – S/.13 000 = S/.12 000

8 ¿Cuál es el peso de un diamante que vale S/.55 000, si uno de 6 quilates cuesta S/.19 800 y el precio es proporcional al cuadrado de su peso? (1 quilate = 0,25 g).

Resolución:

Sea "x" g el peso del diamante.

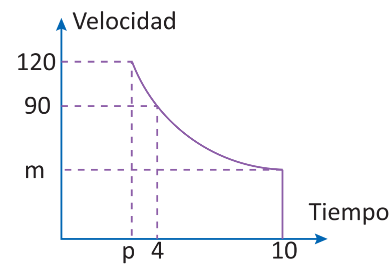
6 quilates = 6(0,25g) = 1,5g

$$\frac{\text{Precio}}{\text{Peso}^2} = K \qquad x^2 = \frac{550 \times 2,25}{198}$$

$$\frac{55000}{x^2} = \frac{19800}{1,5^2} \qquad x^2 = 6,25$$

$$x = 2,5$$

9 Si la siguiente gráfica muestra dos magnitudes inversamente proporcionales, halla: "m + p".



Resolución:

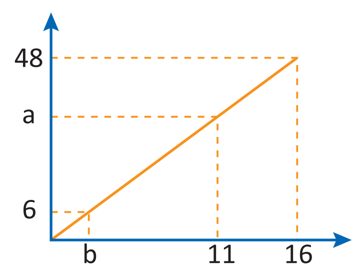
Como Velocidad IP Tiempo

Entonces: velocidad $\times$ tiempo = constante

$120 \times p = 90 \times 4 \;\wedge\; 10\,m = 90 \times 4$

$p = 3 \quad \wedge \quad m = 36 \quad \therefore m + p = 39$

10 En la gráfica se muestran dos magnitudes directamente proporcionales, halla: $a \times b$



Resolución:

Sabemos que las magnitudes son directamente proporcionales, entonces su cociente es constante.

$$\frac{6}{b} = \frac{48}{16} \quad \wedge \quad \frac{a}{11} = \frac{48}{16}$$

$$\frac{6}{b} = 3 \quad \wedge \quad \frac{a}{11} = 3$$

$$b = 2 \qquad a = 33 \qquad \therefore a \times b = 66$$

Actividades de razonamiento

1. 28 obreros pueden realizar una obra en 18 días, si al cabo del octavo día se incorporaron "a" obreros terminando así 3 días antes de lo establecido, calcula "a".

A) 8 B) 12 C) 10 D) 18 E) 15

2. 6 obreros pueden terminar un trabajo en 24 días. Después de 8 días de trabajo se le juntan 2 obreros más. ¿En cuánto tiempo terminarán lo que falta de la obra?

A) 15 B) 18 C) 20 D) 12 E) 16

3. 18 obreros se comprometen a realizar una obra en 20 días trabajando 8 h/d, al cabo del quinto día se les pidió que entreguen la obra 3 días antes de lo pactado, razón por la cual se decide trabajar 9 h/d y contratar más obreros. ¿Cuántos obreros se contrataron?

A) 2 B) 5 C) 3 D) 1 E) 6

4. 10 obreros pueden realizar una obra en 24 días a razón de 8 h/d. Al cabo de 10 días de iniciado el trabajo se contratan x obreros para acabar la obra 7 días antes de lo planificado. Calcula x si estos últimos días los obreros trabajaron a razón de 10 h/d.

A) 8 B) 9 C) 6 D)7 E) 10

5. Si A es DP a B^2 e IP a $\sqrt{C}$, cuando A = 81; B = 8 y C = 256, halla "A" cuando B = 4 y C = 9.

A) 27 B) 54 C) 81 D) 96 E) 108

6. Si A^3 es DP a $\sqrt{B}$ e IP a C^2 cuando A = 2, B = 4 y C = 12. ¿Cuánto vale B, cuando A = 4 y C = 6?

A) 16 B) 4 C) 64 D) 8 E) 2

7. Marcelo es un taxista que acostumbra a cobrar en forma proporcional al número de pasajeros que transporta y a la distancia recorrida. Si a 2 pasajeros les cobró S/.30 por recorrer 60 km, ¿cuánto les cobrará a 5 pasajeros por recorrer 12 km?

A) S/.12 B) S/.20 C) S/.15 D) S/.16 E) S/.25

8. El pago de un albañil es proporcional a la raíz cuadrada del número de losetas colocadas, si el primer día coloca 36 losetas y el segundo día coloca 64 losetas y por los dos días le pagaron S/.420. Calcula el pago de cada día.

A) S/.120 y S/.300 B) S/.180 y S/.240
C) S/.140 y S/.280 D) S/.160 y S/.260
E) S/.100 y S/.320

9. A y B son dos magnitudes donde se muestra sus valores correspondientes.

A	30	12	m	a
B	n	15	10	1

calcula (m +n + a), si se sabe que A es IP a B

A) 204 B) 214 C) 194 D) 208 E) 216

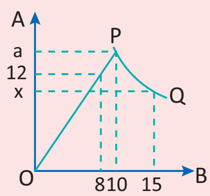
10. Calcula a + b si se cumple que: A^2 DP B.

A	a	8	16	12
B	150	24	96	b

A) 96 B) 72 C) 108 D) 74 E) 98

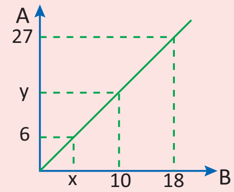
11. En la figura adjunta, $\overline{OP}$ representa una relación directa y la curva PQ una relación inversa.

Halla "x + a".



A) 15 B) 25 C) 20 D) 18 E) 30

12. De acuerdo al gráfico A es DP a B. Halla el valor de x + 2y.



A) 24 B) 32 C) 34 D) 36 E) 28

13. Se tiene A; B; C y D donde A y B tienen un eje común. B y C engranan, C y D tienen un eje común. Si la rueda A da 150 vueltas por minuto y se observa que la rueda D gira 50 vueltas por minuto, determina el número de dientes del engranaje C, si este tiene 20 dientes más que el engranaje B.

A) 10 B) 20 C) 50 D) 30 E) 40

14. A y B son dos magnitudes, tales que:

A es DP a B; si B ≤ 8
A es IP a B; si B ≥ 8

Si A es 2 cuando B es 1. Halla A cuando B es 32.

A) 5 B) 7 C) 8 D) 6 E) 4

Claves

1. B 2. D 3. A 4. C
5. E 6. A 7. C 8. B
9. A 10. D 11. B 12. C
13. D 14. E

Reto



Si: "A" es DP a "B"; "B" es IP a C^2, "C" es DP a D^3, entonces "A" es IP a:

Rpta.: D^6

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Un pintor emplea 16 horas para pintar una habitación. ¿Cuánto tiempo emplearán 4 pintores?

A) 9 horas B) 6 horas C) 8 horas
D) 10 horas E) 4 horas

2. Si 10 obreros realizan una obra en 25 días, ¿cuántos días emplean 5 obreros en las mismas condiciones de trabajo para hacer la misma obra?

A) 7 días B) 5 días C) 9 días
D) 8 días E) 10 días

3. Si 80 kg de azúcar cuestan S/. 240, ¿cuánto cuestan 60 kg de azúcar de esa misma calidad?

A) S/.180 B) S/.200 C) S/.240
D) S/.120 E) S/.250

4. Seis trabajadores han votado un desmonte en 15 horas. Cinco trabajadores, de igual rendimiento que los anteriores, ¿en qué tiempo hubieran hecho el mismo trabajo?

A) 13 horas B) 16 horas C) 20 horas
D) 17 horas E) 18 horas

5. Trabajando 9 horas, en un día un joven ha hecho 15 bancos. Al día siguiente se propone hacer 20 bancos, ¿cuántas horas debe trabajar?

A) 17 horas B) 18 horas C) 12 horas
D) 20 horas E) 16 horas

6. Calcula "x", si la magnitud A es directamente proporcional con B^2.

A	12	3
B	4	x

A) 4 B) 6 C) 10
D) 2 E) 8

7. Calcula "x", si la magnitud A es inversamente proporcional a $\sqrt{B}$.

A	8	x
B	9	4

A) 8 B) 15 C) 18
D) 10 E) 12

8. Si A es DP a $\sqrt[3]{B}$, calcula "x".

A	12	x
B	27	8

A) 7 B) 8 C) 10
D) 9 E) 12

9. Si A^2 es DP a B, calcula "x".

A	5	15
B	3	x

A) 18 B) 22 C) 20
D) 21 E) 27

10. Si A es IP a $\sqrt{B}$, calcula: x + y

A	12	x	16
B	16	4	y

A) 28 B) 33 C) 30
D) 40 E) 25

NIVEL 2

11. A es directamente proporcional a la raíz cuadrada de B e inversamente proporcional al cuadrado de C, cuando A es 8, B es 16 y C es 6. Calcula el valor de B cuando A sea 9 y C sea 4.

A) 3 B) 6 C) 8
D) 5 E) 4

12. Se tienen las magnitudes A; B; C y D tales que A es DP a B; A es IP a C; A es IP a D. Cuando A = 5; B = 2C y D = 2. Halla el valor de A cuando B = 48; C = 2 y D = 3.

A) 40 B) 45 C) 50
D) 25 E) 30

13. Se sabe que una magnitud "A" es inversamente proporcional a "B". Halla el valor de "A" sabiendo que si disminuye en 36 unidades, el valor de "B" varía en un cuarto.

A) 100 B) 200 C) 180
D) 150 E) 170

14. El número a es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número b. Si a = 5/7 cuando b = 49, ¿cuál es el valor de b, si a = 1/4?

A) 350 B) 400 C) 250 D) 200 E) 300

15. Una rueda "A" de 100 dientes engrana con otra rueda "B" de 60 dientes. Si la rueda "A" tiene una velocidad de 30 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas dará la rueda "B" en 15 minutos?

A) 550 B) 800 C) 700 D) 650 E) 750

16. Si A varía proporcionalmente con $(B^2 + 4)$ y B varía proporcionalmente con $\sqrt{C} - 5$; además cuando A = 16; B = 2; C = 81. Calcula A cuando C = 49.

A) 8 B) 12 C) 9 D) 10 E) 15

17. El gasto de una persona es DP a su sueldo, siendo el resto ahorrado. Un señor cuyo sueldo es S/.900 ahorra S/.90. ¿Cuál será su sueldo cuando su gasto sea S/.1260?

A) S/.1200 B) S/.1500 C) S/.1400
D) S/.1600 E) S/.1000

18. Se sabe que A es DP a B2 (cuando C es constante) y C es IP a $1/\sqrt{A}$ (cuando B es constante); cuando A = 36; B = 2 y C = 3. Halla A cuando B = 1/3 y C = 1/2.

A) 1/20 B) 1/25 C) 1/40 D) 1/36 E) 1/32

(19) "R" varía directamente con "S" e inversamente con "T"; cuando $R = 4/3$, $T = 9/14$ y $S = 3/7$. Halla "S" cuando $R = \sqrt{48}$ y $T = \sqrt{75}$.

A) 30 B) 35 C) 40 D) 37 E) 32

(20) Si la magnitud A es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de B, ¿qué variación experimenta cuando el valor de B disminuye en un 75%?

A) 50% B) 80% C) 20% D) 60% E)100%

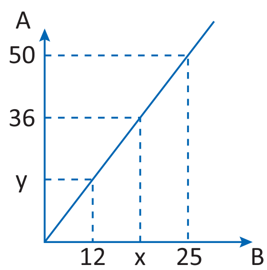
NIVEL 3

(21) Se tienen tres magnitudes: A; B y C. Si A es directamente proporcional al cuadrado de B e inversamente proporcional al cubo de C, completa el siguiente cuadro y da como respuesta: "m . p".

A	160	135	p
B	4	2	10
C	3	m	6

A) 230 B) 200 C) 270 D) 260 E) 250

(22) De acuerdo al gráfico, "A" es directamente proporcional a "B". Halla el valor de: "x + y".



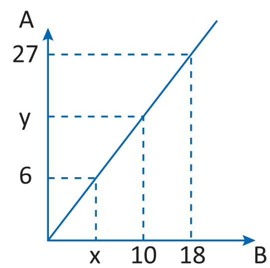
A) 48 B) 42 C) 38 D) 45 E) 30

(23) Dos bombas trabajando 5 horas diarias durante 4 días, logran bajar el nivel del agua en 65 cm. ¿En cuántos días, 3 bombas similares, bajarán el nivel en 78 cm funcionando 8 horas diarias?

UNMSM-2004 II

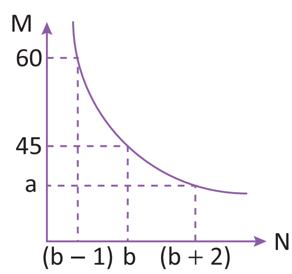
A) 2 B) 4 C) 9 D) 7 E) 6

(24) De acuerdo al gráfico, "A" es directamente proporcional a "B". Halla el valor de: "x + 2y".



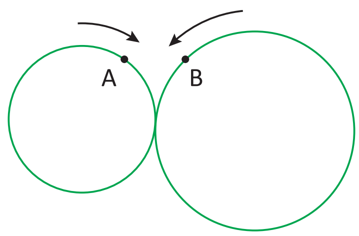
A) 42 B) 30 C) 28 D) 38 E) 34

(25) De acuerdo al gráfico, "M" es inversamente proporcional a "N". Halla el valor de "a + 5b".



A) 80 B) 50 C) 70 D) 40 E) 60

26. En un sistema de engranajes de 20 y 80 dientes, los puntos A y B coinciden en cierta vuelta. ¿Cuántas vueltas deberá girar el engranaje menor para que coincida nuevamente?

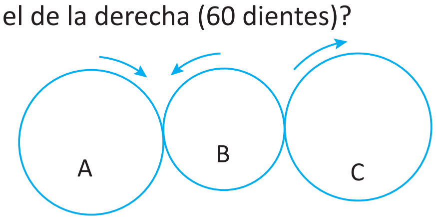


A) 4 B) 6 C) 10
D) 2 E) 8

27. Una rueda "A" de 80 dientes engrana con otra rueda "B" de 60 dientes; fija al eje de "B" hay otra rueda "C" de 20 dientes que engrana con una rueda "D" de 40 dientes. Si "A" da 120 vueltas por minuto, ¿cuántas vueltas dará la rueda "D"?

A) 80 B) 60 C) 50
D) 70 E) 100

28. En la figura, el engranaje central (15 dientes) realiza 240 vueltas. ¿Cuál es el exceso de vueltas que realiza el engranaje de la izquierda (45 dientes) sobre el de la derecha (60 dientes)?

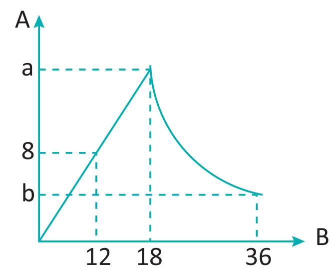


A) 15 B) 20 C) 10
D) 40 E) 30

29. El precio de un tubo de fierro varía proporcionalmente al cuadrado de su longitud. Las longitudes de 2 tubos están en la relación de 4 a 9. ¿En qué relación están sus precios?

A) 8/27 B) 4/3 C) 7/15
D) 8/81 E) 16/81

30. La gráfica muestra los valores que toman dos magnitudes A y B. Calcula (a + b).



A) 26 B) 20 C) 18
D) 24 E) 16

Claves

NIVEL 1
1. E
2. B
3. A
4. E
5. C
6. D
7. E
8. B
9. E
10. B

NIVEL 2
11. E
12. A
13. C
14. B
15. E
16. D
17. C
18. D
19. A
20. E

NIVEL 3
21. E
22. B
23. A
24. E
25. B
26. A
27. A
28. B
29. E
30. C

Orden de información

DEFINICIÓN

Este capítulo trata sobre aquellos tipos de problemas que engloban una serie de datos aparentemente desordenados, pero que guardan entre sí un sentido lógico.

Estos pueden ser:

Ordenamiento por cuadros de doble entrada

Un cuadro de doble entrada sirve para organizar información que permita decidir la característica propia que tiene cada sujeto de un grupo.

Ejemplo:
4 amigas se reúnen para celebrar el cumpleaños de una de ellas. Sus nombres son: Andrea, Diana, Nadia y Vanessa. Sus ocupaciones son: chef, diseñadora, modelo y estilista. No necesariamente en ese orden.

- La más joven es chef.
- Nadia es soltera y es menor que la modelo.
- La diseñadora es casada.
- Diana es la mayor de todas.
- Andrea juega tenis con la chef todos los jueves a las 7 p.m.
- Nadia y la más joven son primas.
- Vanessa no es estilista.
- Diana y la diseñadora han viajado juntas a Colombia en cierta oportunidad.

Indica la ocupación de cada una.

Resolución:

- Nadia es soltera y es menor que la modelo.
  La diseñadora es casada.
  Conclusión: Nadia no es diseñadora ni modelo.

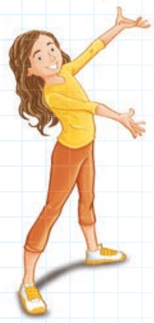
	Chef	Diseñadora	Modelo	Estilista
Andrea				
Diana				
Nadia		×	×	
Vanessa				

- La más joven es chef.
  Diana es la mayor de todas.
  Conclusión: Diana no es chef.

	Chef	Diseñadora	Modelo	Estilista
Andrea				
Diana	×			
Nadia		×	×	
Vanessa				

Importante

En una primera lectura del problema, se reconocen los sujetos y las características que le corresponden, de esta manera se puede elaborar el cuadro de doble entrada.



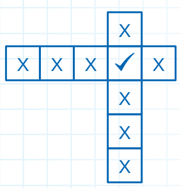


Atención

Es necesario leer varias veces el enunciado para ir sacando conclusiones que permitan llenar el cuadro de doble entrada.

Nota

No olvidar, si se coloca ✓, el resto de la fila o columna es X.



- Andrea juega tenis con la chef todos los jueves.
  Conclusión: Andrea no es chef.

	Chef	Diseñadora	Modelo	Estilista
Andrea	✗			
Diana	✗			
Nadia		✗	✗	
Vanessa				

- Nadia y la más joven son primas.
  La más joven es chef.
  Conclusión: Nadia no es chef.

	Chef	Diseñadora	Modelo	Estilista
Andrea	✗			
Diana	✗			
Nadia	✗	✗	✗	
Vanessa	✓	✗	✗	✗

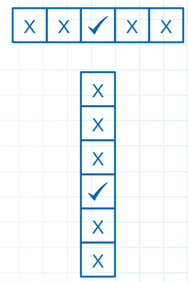
- Diana y la diseñadora han viajado juntas a Colombia en una oportunidad.
  Conclusión: Diana no es diseñadora.

	Chef	Diseñadora	Modelo	Estilista
Andrea	✗	✓	✗	✗
Diana	✗	✗	✓	✗
Nadia	✗	✗	✗	✓
Vanessa	✓	✗	✗	✗

Finalmente:
- Andrea - diseñadora
- Diana - modelo
- Nadia - estilista
- Vanessa - chef

Nota

No olvidar si en una fila o columna queda un cuadro blanco y el resto es X, entonces, el cuadro debe ser ✓.



Ordenamiento circular

Se aplica para distribuir a personas alrededor de una mesa.

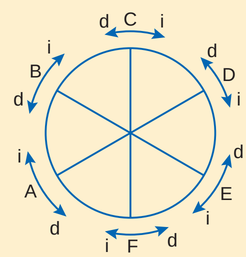
Ejemplos:

1. Seis amigos salen a comer y se sientan en una mesa circular con 6 asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:
- Andrés se sienta junto y a la derecha de Beatriz y frente a Cirilo.
- Beatriz no se sienta junto a Dimas.
- Cirilo no se sienta junto a Edwin.
- Flavia solo comió una ensalada mixta.

Indica quién se sentó junto y a la derecha de Cirilo.

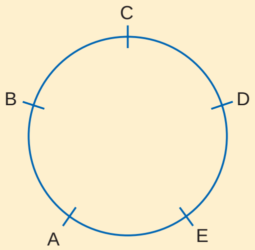


Atención



d: derecha
i: izquierda

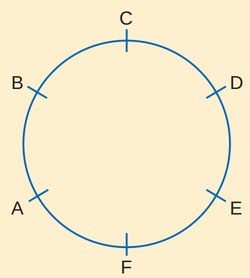
Recuerda



- A la derecha de "A" están "E" y "D".
- A la izquierda de "A" están "B" y "C".
- Nadie está frente a "A".



Observación

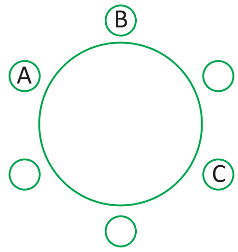


- A partir de "A" y en sentido horario están:
  B – C – D – E – F
- A partir de "A" y en sentido antihorario están:
  F – E – D – C – B

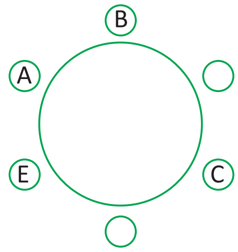


Resolución:

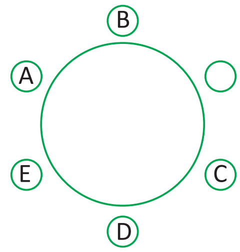
- Andrés se sienta junto y a la derecha de Beatriz y frente a Cirilo.



- Cirilo no se sienta junto a Edwin.

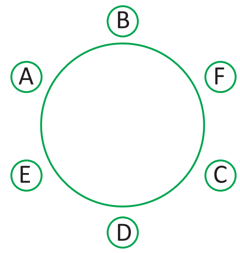


- Beatriz no se sienta junto a Dimas.



- Flavia solo comió una ensalada mixta.

Conclusión: Flavia es la 6.ª amiga.



∴ Junto y a la derecha de Cirilo se ubica Flavia.

2. Luz, Elza, Dante, julio, Ana y Sandro se sientan alrededor de una mesa circular distribuidos de manera simétrica. Se sabe que son 3 parejas y que cada esposo se sienta al lado de su esposa.

Además:

I. Sandro se sienta junto y a la derecha de Elsa.
II. Julio se sienta frente a Ana.
III. Dante está junto y a la izquierda de Luz.

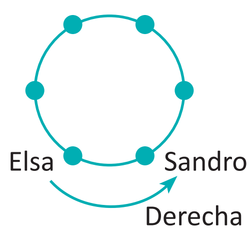
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) Julio y Elsa se sientan juntos.
B) Luz no se sienta frente a Sandro.
C) Dante está entre Luz y Ana.

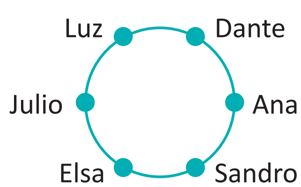
Resolución:

- En total son 6 personas, las cuales representamos con 6 puntos:

Empezamos por el dato I:



- Sabiendo que las parejas se sientan juntas, y con la información de los datos II y III:



Analizando las afirmaciones, son verdaderas A y C.

Problemas resueltos

1 5 alumnos de un colegio público estudian en diferentes secciones de quinto de secundaria. Se sabe que:

- Anicama, Borges y el que estudia en 4.°D hacen juntos la tarea.
- Durand, Esquivel y el que estudia en 4.°A viajan juntos.
- Cueva y los que estudian en 4.°B y 4.°C estudiaron juntos el año pasado.
- Los que estudian en 4.°B y en 4.°E son hinchas del mismo equipo que Anicama y Borges.
- Cueva y Esquivel llegaron tarde un día con el de 4.°D.
- El que estudia en 4.°C y Borges son los encargados del periódico mural de 4.° de secundaria.

¿Cómo se llama el que estudia en 4.°E?

Resolución:

- Anicama, Borges y el que estudia en 4.°D hacen juntos la tarea, entonces, ni Anicama, ni Borges estudian en 4.°D.
- Durand, Esquivel y el que estudia en 4.°A viajan juntos, entonces, ni Durand, ni Esquivel estudian en 4.°A.
- Cueva y los que estudian en 4.°B y 4.°C estudiaron juntos el año pasado.
  Entonces, Cueva no estudia en 4.°B, ni en 4.°C.
- Los que estudian en 4.°B y en 4.°E son hinchas del mismo equipo que Anicama y Borges.
  Entonces, ni Anicama, ni Borges estudian en 4.°B o 4.°C.
- Cueva y Esquivel llegaron tarde con el de 4.°D.
- Borges y el que estudia en 4.°C son los encargados del periódico mural.
  Entonces Borges no estudia en 4.°C.

Ordenando estos datos en una tabla:

	4.° de secundaria				
	A	B	C	D	E
Anicama	✗	✗	✓	✗	✗
Borges	✓	✗	✗	✗	✗
Cueva	✗	✗	✗	✗	✓
Durand	✗	✗	✗	✓	✗
Esquivel	✗	✓	✗	✗	✗

∴ El que estudia en 4.°E es Cueva.

2 Un grupo de 6 amigos forman un equipo de fulbito. Se sabe que:

- Aldo, Jonathan y Lalo son vecinos del defensa izquierdo.
- Al arquero, al mediocampista y a José, les gusta el ceviche.
- Marco no es delantero ni defensa.
- Cristhian no juega de defensa.
- Jonathan es arquero o mediocampista.
- El mediocampista y Cristhian estudian con Jonathan.
- Lalo es el delantero derecho.
  ¿Quién es el defensa derecho?

Resolución:

- Aldo, Jonathan y Lalo son vecinos del defensa izquierdo, entonces ninguno de los 3 es defensa izquierdo.
- Al arquero, al mediocampista y José les gusta el ceviche.
  Entonces, José no es arquero ni mediocampista.
- El mediocampista y Cristhian estudian con Jonathan.
  Entonces, ni Cristhian, ni Jonathan son mediocampistas.
- Jonathan es arquero o mediocampista.
  Entonces Jonathan es arquero.
- Marco no es delantero ni defensa.
  Entonces Marco es arquero o mediocampista, pero Jonathan es arquero, luego Marco es mediocampista.
- Lalo es delantero derecho.
- Cristhian no juega de defensa y tampoco puede ser arquero ni mediocampista, entonces es delantero izquierdo.

Ordenando los datos en una tabla:

	Posiciones					
	Arquero	Defensa derecho	Defensa izquierdo	Medio	Delantero derecho	Delantero izquierdo
Aldo	✗	✓	✗	✗	✗	✗
Cristhian	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Jonathan	✓	✗	✗	✗	✗	✗
José	✗	✗	✓	✗	✗	✗
Lalo	✗	✗	✗	✗	✓	✗
Marco	✗	✗	✗	✓	✗	✗

∴ Aldo es el defensa derecho.

3 En un colegio están reunidos: Esteban, Ricardo, Simón y Nicolás, cuyos cargos son: director, subdirector, secretario y conserje no necesariamente en ese orden. Además sus edades son: 25; 29; 45 y 65 no necesariamente en ese orden.
Se sabe que:

- Ricardo es sobrino del secretario.
- El director es el mayor de todos.
- Esteban y el subdirector no son amigos.
- El director y el conserje son muy amigos de Nicolás.
- El secretario solo es menor que el director.
- El secretario se llama Esteban y es mayor que el menor.
- Simón y el conserje viven cerca al más joven.

a) ¿Quién tiene 45 años?
b) ¿Qué cargo ocupa Simón?

Resolución:

- Esteban y el subdirector no son amigos.
  Entonces, Esteban no es subdirector.
- El director y el conserje son muy amigos de Nicolás.
  Entonces, Nicolás no es director ni conserje.
- Ricardo es sobrino del secretario.
  Entonces, Ricardo no es secretario.
- Simón y el conserje viven cerca al más joven.
  Entonces, Simón no es conserje, ni el más joven.
- El director es el mayor de todos.
- El secretario solo es menor que el director.
- El secretario se llama Esteban y es mayor que el menor.

Ordenando los datos en un cuadro:

	Cargos				Edades			
	Director	Sudirector	Secretario	Conserje	25	29	45	65
Esteban	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗
Ricardo	✗	✗	✗	✓			✗	✗
Simón	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Nicolás	✗	✓	✗	✗			✗	✗

Luego:

- Como el secretario solo es menor que el director, entonces el secretario tiene 45 años y es Esteban.
- El más joven no es conserje.
  Entonces solo puede ser subdirector.

Finalmente se tiene:

	Cargos				Edades			
	Director	Sudirector	Secretario	Conserje	25	29	45	65
Esteban	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗
Ricardo	✗	✗	✗	✓	✗	✓	✗	✗
Simón	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓
Nicolás	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗

a) Esteban tiene 45 años.

b) Simón es el director.

4 Un grupo de amigas gusta cada una de un juego: ajedrez, damas, dominó y monopolio; cada una tiene una mascota: pato, perro, loro, gato, cada una ve un programa diferente: noticias, comedia, documento, musical. Si se sabe que:

i) Charo ve noticias.
ii) La que juega monopolio tiene como mascota al gato.
iii) Lourdes no tiene al loro.
iv) A la que le gusta las comedias juega ajedrez.
v) Anastasia juega dominó.
vi) La que tiene al perro ve documentales.
vii) Juana no juega ajedrez.
viii) La que juega damas, ve musicales.

a) ¿Quién juega damas?
b) ¿Qué mascota tiene Charo?

Resolución:

Ordenamos los datos en una tabla.

	Juego				Mascota				Programa				
	Ajedrez	Damas	Dominó	Monopolio	Pato	Perro	Loro	Gato	Noticias	Comedia	Documental	Musical	
Charo			✗						✓	✗	✗	✗	
Lourdes			✗				✗		✗				
Anastasia	✗	✗	✓	✗					✗				
Juana	✗		✗						✗				
				✓				✓					ii
	✓									✓			iv
						✓					✓		vi
		✓										✓	viii

- De iv) la que juega ajedrez ve comedias, entonces los que no juegan ajedrez (Anastasia y Juana) no verán comedias.

Completamos el cuadro:

	Juego				Mascota				Programa			
	Ajedrez	Damas	Dominó	Monopolio	Pato	Perro	Loro	Gato	Noticias	Comedia	Documental	Musical
Charo	✗		✗						✓	✗	✗	✗
Lourdes	✓	✗	✗	✗			✗		✗	✓	✗	✗
Anastasia	✗	✗	✓	✗					✗	✗		
Juana	✗		✗						✗	✗		
ii				✓				✓				
iv	✓									✓		
vi						✓					✓	
viii		✓										✓

- De (viii), la que juega damas ve musicales, entonces los que no juegan damas (Anastasia y Lourdes) no ven musicales.

Completamos el cuadro:

	Juego				Mascota				Programa			
	Ajedrez	Damas	Dominó	Monopolio	Pato	Perro	Loro	Gato	Noticias	Comedia	Documental	Musical
Charo	✗	✗	✗	✓					✓	✗	✗	✗
Lourdes	✓	✗	✗	✗			✗		✗	✓	✗	✗
Anastasia	✗	✗	✓	✗					✗	✗	✓	✗
Juana	✗	✓	✗	✗					✗	✗	✗	✓
ii				✓				✓				
iv	✓									✓		
vi						✓					✓	
viii		✓										✓

- De (vi) la que tiene al perro ve documentales (Anastasia).

Completamos el cuadro:

	Juego				Mascota				Programa			
	Ajedrez	Damas	Dominó	Monopolio	Pato	Perro	Loro	Gato	Noticias	Comedia	Documental	Musical
Charo	✗	✗	✗	✓		✗			✓	✗	✗	✗
Lourdes	✓	✗	✗	✗		✗	✗		✗	✓	✗	✗
Anastasia	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗
Juana	✗	✓	✗	✗		✗			✗	✗	✗	✓
ii				✓				✓				
iv	✓									✓		
vi						✓					✓	
viii		✓										✓

- De (ii) la que juega monopolio (Charo) tiene como mascota al gato.
- Completamos el cuadro:

	Juego				Mascota				Programa			
	Ajedrez	Damas	Dominó	Monopolio	Pato	Perro	Loro	Gato	Noticias	Comedia	Documental	Musical
Charo	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✗	✗
Lourdes	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗
Anastasia	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗
Juana	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓

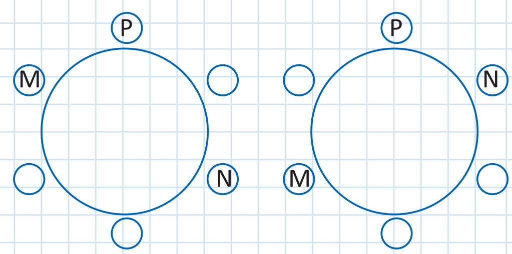
a) Juana juega damas.

b) Charo tiene de mascota a un gato.

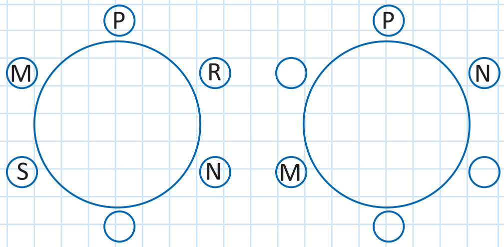
5 6 amigas se sientan alrededor de una mesa circular. María, que está sentada a la derecha de Paula, se encuentra frente a Nadia; Paula está frente a la que está junto y a la derecha de Sofía, que está frente a Rosa. ¿Quién está junto y a la derecha de Cinthia?

Resolución:

- María está sentada a la derecha de Paula y frente a Nadia. Existen 2 posibilidades:

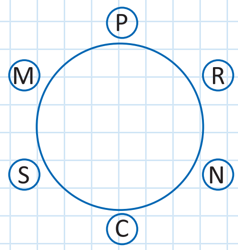


- Paula está frente a la que está junto y a la derecha de Sofía que está frente a Rosa.



No cumple

Luego:

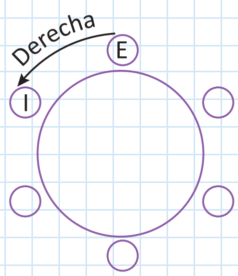


∴ A la derecha de Cinthia está Nadia.

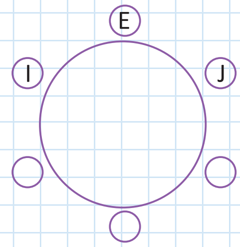
6 En una mesa circular hay 6 asientos simétricamente colocados ante la cual se sientan 6 amigas a jugar ludo. Si Luzmila no está sentada al lado de Estela ni de Judith, Miriam no está al lado de Celia ni de Judith, Estela ni está al lado de Celia ni de Miriam, Irma está junto y a la derecha de Estela. ¿Quién está sentada junto y a la izquierda de Miriam?

Resolución:

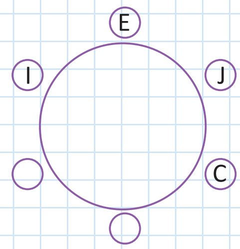
- Irma está junto y a la derecha de Estela.



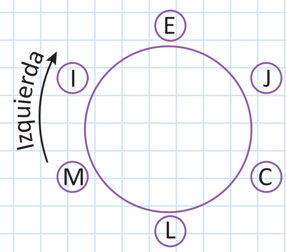
- Luzmila no está sentada al lado de Estela. Estela no está al lado de Celia ni de Miriam. Entonces Judith está al lado de Estela.



- Luzmila no está sentada al lado de Judith.
- Miriam no está sentada al lado de Judith. Entonces Celia está al lado de Judith.



- Miriam no está sentada al lado de Celia Entonces Luzmila está al lado de Celia.



∴ A la izquierda de Miriam se ubica Irma.

Actividades de razonamiento

1. Se tiene un edificio de seis pisos en el cual viven seis personas A, B, C, D, E y F, cada uno en un piso diferente. Si se sabe que:

- "E" vive adyacente a "C" y "B".
- Para ir de la casa de "E" a la de "F" hay que bajar tres pisos.
- "A" vive en el segundo piso.

¿Quién vive en el último piso?

A) D B) A C) B D) E E) C

2. En una reunión, cuatro amigos se sientan alrededor de una mesa redonda con 4 sillas distribuidas simétricamente. Si sabemos que.

- Juan se sienta junto y la derecha de Luis.
- Pedro no se sienta junto a Luis.
- José les comentó lo entretenida que está la reunión.

Podemos afirmar que:

A) José y Juan se sientan juntos.
B) Luis y José no se sientan juntos.
C) No es cierto que José y Juan no se sientan juntos.
D) Pedro se sienta junto y a la derecha de José.
E) Juan se sienta junto y a la izquierda de Pedro.

3. Patricia es más alta que Rosa, pero más baja que Roxana; Elena es más baja que Patricia y más alta que Juana; Milagros es más alta que Patricia.
Se puede afirmar que:

A) Elena es más baja que Rosa.
B) Es falso que Rosa sea más baja que Milagros.
C) Milagros es más alta que Roxana.
D) Juana es más baja que Roxana.
E) Es mentira que Milagros sea más alta que Juana.

4. En una reunión los profesores M; N; P; Q y R se sientan alrededor de una mesa circular, y se observa que:

I. Entre R y P no se sienta nadie.
II. M se sienta la costado de N y frente a P.
III. P es mayor que N y Q.
IV. El mayor se sienta al costado derecho de M.

¿Cuál es la ubicación de "Q"?

A) A la derecha de R. B) A la izquierda de R.
C) A la izquierda de P. D) Entre N y P.
E) Entre M y N.

5. Juana, Rosa y Ana enseñan Matemáticas, Física y Química en los siguientes colegios:
La Salle, San Agustín, Guadalupe. Si se sabe que: Juana enseña en San Agustín y ahí no se enseña Física, Rosa no enseñó nunca en La Salle, Ana no enseñó Física ni Matemáticas ¿Quién enseña Química y dónde trabaja Rosa?

A) Juan - San Agustín B) Rosa - La Salle
C) Ana - La Salle D) Rosa - San Agustín
E) Ana - Guadalupe

6. Tres amigas: Mara, Luisa e Irma cumplen años los días 7; 9 y 30 durante los meses de enero, septiembre y diciembre, aunque no necesariamente en ese orden. Si:

- El 9 de septiembre ninguna de ellas cumple años.
- Luisa celebra su cumpleaños el 8 de diciembre, con un día de diferencia de la fecha real.
- El 30 de enero ninguna de ellas cumple años.
- Irma no nació en septiembre.

¿Cuándo es el cumpleaños de Mara?

A) 30 de septiembre B) 30 de diciembre
C) 9 de enero D) 7 de enero
E) 9 de diciembre

7. Tres hermanos estudian en cada una de las siguientes universidades: San Marcos, Villarreal y UNI, carreras diferentes: Ingeniería Textil, Ingeniería Civil, Biología. Julio no estudia en San Marcos, Daniel no está en la Villarreal, el que está en San Marcos no estudia Ingeniería Textil, el que está en la Villarreal estudia Ingeniería Civil. Daniel no estudia Biología, se quiere saber qué estudia Ricardo y dónde.

A) Biología - Villarreal B) Biología - San Marcos
C) Ing. Civil - San Marcos D) Ing. Civil - Villarreal
E) Ing. Textil - San Marcos

8. Se sabe que las profesiones de Ana, Claudia, Karina y Sara son arqueóloga, abogada, odontóloga y profesora, no necesariamente en este orden. ¿Quién es la abogada y quién es la profesora?, si:

- Ana está casada con el hermano de la abogada.
- Claudia y la profesora van a trabajar en la movilidad de la abogada.
- Las solteras Karina y la arqueóloga son hijas únicas.
- Claudia y Sara son amigas de la odontóloga, la cual está de novia.

A) Ana - Sara B) Claudia - Karina C) Ana - Claudia
D) Sara - Claudia E) Sara - Karina

9. Cuatro amigos se sientan alrededor de una mesa circular con 4 sillas distribuidas simétricamente. Si se sabe que:

- Gerson se sienta junto y a la derecha de Manolo.
- Gerardo les comentó lo entretenida que está la reunión.
- Abelardo no se sienta junto a Manolo.

A) Gerardo y Gerson se sientan juntos.
B) Manolo y Gerardo no se sientan juntos
C) No es cierto que Gerardo y Gerson no se sientan juntos.
D) Abelardo se sienta junto y a la derecha de Gerardo
E) Gerson se sienta junto y a la izquierda de Abelardo.

10. Cuatro hermanos: Leo, Iván, Cynthia y Gellmy se sientan alrededor de una mesa circular, alrededor de la cual se distribuyen simétricamente seis sillas; se sabe que entre dos personas de un mismo sexo hay un asiento adyacente sin ocupar y que Gellmy está junto a Leo. Podemos afirmar que son verdaderas:

I. Cynthia se sienta frente a Leo.
II. Iván se sienta frente a Gellmy.
III. Iván se sienta junto a Cynthia.

A) I B) II C) I y II
D) I y III E) Todas

11. Por el aniversario de Lima, 6 presidentes se encuentran en el palacio de gobierno, sentados en una mesa redonda para hablar sobre un proyecto multinacional y se ubican así: el presidente del Perú no está sentado al lado del presidente ecuatoriano ni de EE.UU. El presidente de Colombia no está sentado al lado del presidente peruano; el presidente de Ecuador no está al lado del presidente de Brasil ni de Colombia. El presidente de Chile está a la izquierda del presidente ecuatoriano.
¿Quién está junto y a la izquierda del presidente peruano?

A) El presidente ecuatoriano. B) El presidente brasileño. C) El presidente chileno.
D) El presidente colombiano. E) El presidente de EE.UU.

12. Son cuatro personas: Moisés, Henry, Toño y Pilar; sus profesiones son: ingeniero, médico, abogado y profesor. Residen en Lima, Huancayo, Ica y Chimbote.

- Toño no vive en Huancayo ni en Ica.
- Pilar no reside en Lima.
- Moisés vive en Chimbote.
- El médico reside en Lima.
- Pilar es ingeniero.
- El abogado vive en Huancayo.

¿Qué profesional vive en Chimbote?

A) El médico. B) El abogado. C) El ingeniero. D) El profesor. E) Faltan datos.

13. Tres estudiantes de Historia, Economía e Ingeniería viven en Chiclayo, Lima y Arequipa (no en ese orden necesariamente).

- El primero no vive en Lima, ni estudia Ingeniería.
- El segundo no vive en Chiclayo y estudia Economía.
- El historiador vive en Arequipa

¿Qué estudia el tercero y dónde vive?

A) Ingeniería, Lima B) Historia, Arequipa C) Historia, Lima D) Ingeniería, Chiclayo E) Faltan datos

14. A una reunión fueron invitados tres parejas de esposos y de ellos se tiene la siguiente información.

- Hay dos colombianos, dos bolivianos y dos panameños.
- No hay dos hombres de la misma nacionalidad.
- No hay una pareja de esposos de la misma nacionalidad.
- Alberto es colombiano y la esposa de Miguel es panameña.
- El tercer varón es Julio.

¿Qué nacionalidad tiene Miguel y la esposa de Julio, respectivamente?

A) Panameño y colombiana B) Boliviano y colombiana C) Colombiano y boliviana
D) Panameño y boliviana E) Boliviano y panameña

Claves

1. A	5. E	9. E	13. D
2. E	6. A	10. E	14. B
3. D	7. B	11. B	
4. D	8. D	12. D	

Reto



Tres parejas de esposos están sentadas en una mesa redonda y ningún hombre está sentado junto a otro, pero sí a su pareja. Si además:

- Ana no está sentada junto a Pedro, ni Alberto junto a Rosa.
- María está sentada junto y a la derecha de Pedro.

¿Quiénes están sentados al costado de Carlos?

Rpta.: Ana y Rosa

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Cuatro compañeros: Alejandro, Benancio, Carlos y Daniel, viven en un mismo edificio en diferentes pisos. Si se sabe que:
   - Benancio vive en el primer piso.
   - Carlos vive adyacente a Daniel y Benancio.
   - Alejandro vive más arriba que Daniel.

   Es cierto que:

   A) Carlos vive en el 3.er piso.
   B) Daniel vive en el 2.° piso.
   C) Alejandro vive en el 3.er piso.
   D) Benancio vive en el 2.° piso.
   E) Daniel vive en el 3.er piso.

2. En una examen:
   - Andrés obtuvo menos puntaje que Beatriz.
   - Daniel menos puntos que Ariel.
   - Camila más puntos que Eduardo.
   - Eduardo más puntos que Beatriz.
   - Ariel menos puntos que Andrés.

   ¿Quiénes obtuvieron el puntaje menor y mayor, respectivamente?

   A) Andrés y Eduardo. B) Daniel y Camila.
   C) Camila y Beatriz. D) Camila y Eduardo.
   E) Beatriz y Camila.

3. Sabemos que Karla es mayor que Gloria, Rosa es menor que Alicia; Gloria es mayor que Paola y que Alicia; Elvis es mayor que Gloria y Rosa no es la menor

   Escribe verdadero o falso, segun corresponde.
   I. Paola es mayor que Rosa.
   II. Elvis es mayor que Rosa.
   III. No es cierto que Paola sea menor que Elvis.

   A) FVV B) FVF C) VFF D) FVV E) FFF

4. Si:
   I. El naranjo no es más alto que el manzano.
   II. El ciruelo no es más bajo que el naranjo.
   III. El palto no es más alto que el naranjo.

   ¿Qué afirmación es cierta?

   A) El palto es el más alto.
   B) El manzano es el más alto.
   C) El palto no es más alto que el ciruelo.
   D) El ciruelo es el más bajo.
   E) El ciruelo es más alto que el manzano.

5. Manuel es mayor que Pedro y Carlos es menor que Óscar; pero este y Manuel tienen la misma edad. Además Carlos es menor que Pedro.

   De las siguientes, son correctas:

   I. Manuel es menor que Carlos.
   II. Manuel es mayor que Carlos.
   III. Pedro es menor que Óscar.
   IV. Pedro es mayor que Óscar.

   A) Solo I B) Solo III C) Solo II
   D) Solo IV E) II y III

6. Hernán es el niño más alto de su clase. En esa misma clase Miguel es más alto que Rubén y más bajo que Peter, luego:

   I. Miguel, Rubén y Peter son más bajos que Hernán.
   II. Hernán es más alto que Peter y más bajo que Rubén.
   III. Peter es más bajo que todos.

   Son verdaderos:

   A) I y II B) Solo I C) II y III
   D) I y III E) Todas

7. Tres amigos: Jorge, Pedro y Raúl se encuentran y comentan sobre los colores de sus carros. Solo hay 3 colores: azul, rojo y verde y no hay dos carros con el mismo color. Jorge dice: "Mi carro no es rojo ni azul". Raúl dice: "Me hubiera gustado sea rojo". ¿De qué color es el carro de Pedro?

A) Azul B) Verde C) Rojo
D) Faltan datos E) Blanco

8. Tres amigos: Fernando, Julio y Luis tienen cada uno un animal diferente. Se sabe que:

- Fernando le dice al dueño del gato que el otro amigo tiene un canario.
- Julio le dice al dueño del gato que su mascota y el perro pelean siempre.
- ¿Qué animal tiene Julio y quién es el dueño del perro?

A) Perro - Julio B) Perro - Fernando
C) Canario - Luis D) Gato - Luis
E) Canario - Fernando

9. Se desea que las personas A; B; C y D correspondan a los nombres de Víctor, José, Manuel y David (sin ser en ese orden).

I. Víctor, C y D fueron al teatro el domingo pasado.
II. José, A y B trabajan en la misma fábrica.
III. A, C y Manuel concurren a los juegos mecánicos con regularidad.
IV. C es de condición humilde, en cambio José es adinerado.

¿Quién es de condición humilde y quién es A?

A) David – Víctor B) Víctor – David
C) Víctor – José D) Manuel – José
E) José – Manuel

10. Alberto, Bruno y César son hermanos y tienen cada uno diferente profesión: ingeniero, médico y abogado; Alberto es el mayor de todos y no es médico, a Bruno nunca le gustó la matemática, el menor de todos es el ingeniero. ¿Cuál es la profesión de Bruno?

A) Abogado B) Ingeniero C) Médico
D) Doctor E) Faltan datos

NIVEL 2

11. Cuatro niñas están jugando con sus juguetes preferidos alrededor de una mesa cuadrada. Si Diana tiene la muñeca; Carla está a la derecha de la que tiene la pelota; Luisa está frente a María; el rompecabezas está a la derecha del peluche; María no tiene la pelota. Se puede afirmar que:



A) Luisa tiene el rompecabezas.
B) Diana tiene el peluche.
C) Luisa tiene la pelota.
D)Carla tiene la muñeca.
E) Diana está a la derecha de Luisa.

12. Cuatro amigos: Peter; Douglas; Carla y Amara, se sientan alrededor de una mesa circular con seis asientos distribuidos simét ricamente. Si se sabe que:

- Solo entre dos personas del mismo sexo hay un asiento vacío.
- Amara se sienta junto a Peter.

Podemos afirmar:

I. Carla se sienta junto a Douglas.
II. Peter se sienta frente a Carla.
III. Amara se sienta frente a Douglas.

A) Solo I B) Solo II C) I y III
D) II y III E) Todas son verdaderas

13. Cuatro hermanos: Anaís; Ximena; André y Mirtha, para hacer sus tareas se sientan alrededor de una mesa circular con cuatro sillas igualmente separadas entre sí. Sabemos que:
    - Ximena se sienta a la derecha de André.
    - Los hermanos cuyos nombres tienen la misma cantidad de letras no se sientan juntos.

    ¿Quién está sentado frente a Mirtha?

    A) Anaís o André B) André
    C) Faltan datos D) Ximena
    E) Anaís

14. Se sabe que las profesiones de Julia, Elena, Ruth y Peta son: profesora, nutricionista, abogada y odontóloga. ¿Quién es la abogada y quién es la odontóloga?

    Si:
    - Julia está casada con el hermano de la nutricionista.
    - Elena y la odontóloga van a trabajar en la movilidad de la nutricionista.
    - Las solteras Ruth y la profesora, son hijas únicas.
    - Elena y Peta son amigas de la abogada, la cual está de novia.

    A) Ruth – Julia B) Elena – Peta
    C) Ruth – Peta D) Ruth – Elena
    E) Elena – Julia

15. Tres amigos de nombres, apellidos y ocupaciones diferentes, se reúnen en la casa de uno de ellos. De ellos tenemos, la siguiente información:

    I. Samuel no es Mamani.
    II. Quispe trabaja de contador.
    III. El actor se llama Hugo.
    IV. El profesor no es Condori.
    V. Uno de los amigos es Carlos.

    ¿Cuál es el apellido y la ocupación de Samuel?

    A) Quispe - contador B) Mamani - profesor
    C) Condori - actor D) Condori - contador
    E) Quispe - actor

16. Tres amigas: Sandra, Blanca y Vanessa, escogieron un distrito diferente para vivir y se movilizan usando un medio de transporte distinto; los distritos son: Lima, Jesús María, Rímac; y los medios de transporte son: bicicleta, moto y microbús.

    I. Cuando Blanca tenga dinero se comprará una moto y se mudará al Rímac.
    II. Desde que Vanessa vive en Jesús María ya no tiene bicicleta.
    III. La que vive en el Rímac toma dos micros.

    ¿En qué distrito vive Sandra y en qué se moviliza?

    A) Lima - moto B) Jesús María - moto
    C) Lima - bicicleta D) Rímac - microbús
    E) Rímac - moto

17. 

    Cinco amigos: Ana, Cecilia, José, Jorge y Luis viven en un edificio de 7 pisos; cada uno en piso distinto. Ana vive en el piso más bajo y Cecilia en el inmediato superior al de Ana. Luis vive en el 7.° piso y Jorge entre los pisos de José y Luis. Si en el primer piso hay tiendas y no vive nadie, y el 4.° piso está deshabitado, determine las afirmaciones verdaderas:

    UNI 2012 II

    I. Ana vive en el 2.° piso.
    II. José vive en el 5.° piso.
    III. Cecilia vive en el 3.er piso.

    A) I; II y III B) I y II C) II y III
    D) Solo I E) Solo II

18. En una reunión se encuentran cuatro amigos, Miguel, Carlos, Jorge y Richard, que a su vez son: basquetbolista, futbolista, obrero e ingeniero, aunque no necesariamente en ese orden. El basquetbolista que es primo de Miguel es el más joven de todos y siempre va al cine con Carlos. Jorge es el mayor de todos y es vecino del futbolista, quien a su vez es millonario. Miguel que es pobre es cinco años menor que el ingeniero. ¿Cuál de las afirmaciones es correcta?

A) Jorge - futbolista
B) Richard - obrero
C) Jorge - basquetbolista
D) Carlos - ingeniero
E) Miguel - obrero

19. Mario, Luis e Iván viven en 3 ciudades diferentes Lima, Cusco y Tacna, estudiando una carrera distinta: Educación, Derecho y Arquitectura.

Si se sabe que:

- Mario no vive en Cusco.
- Luis no vive en Tacna.
- El que vive en Cusco no estudia Derecho.
- Quien vive en Tacna estudia Arquitectura.
- Luis no estudia Educación.

¿Donde vive Iván y qué estudia?

A) Lima - Arquitectura
B) Lima - Educación
C) Lima - Derecho
D) Cusco - Educación
E) Tacna - Derecho

20. Seis amigos están sentados alrededor de una mesa redonda. Se sabe que:

- Ana está sentada frente a Clara.
- Bertha está sentada a la izquierda de Doris.
- Elena está sentada a la izquierda de Frida.
- Frida está frente a Doris.
- Clara está junto a Frida y Bertha.

¿Quién está sentada junto a Ana y Bertha?

A) Clara
B) Doris
C) Elena
D) Frida
E) Falta información

NIVEL 3

21. Cinco amigas: Ana, Bertha, Carmela, Diana y Elsa se van de campamento. Por la noche, se sientan alrededor de una fogata formando un círculo, separadas a igual distancia una de la otra. Sabiendo que:

- Ana se sienta al lado de Bertha y Carmela.
- Diana no se sienta al lado de Carmela.

¿Quién se sienta al lado de Elsa y Bertha?

A) Ana y Diana
B) Ana
C) Diana
D) Faltan datos
E) Carmela

22. En una mesa redonda se ubican 8 amigos: Aída, Liz, Sam, Leo, Teo, Mía, Luz y Pía. Se sabe que Aída está al frente de Liz; Luz está a la derecha de Pía; Sam se ubica entre Liz y Pía; Leo está a la izquierda de Liz; Teo entre Aída y Mía; Leo entre Mía y Liz.



Determina las proposiciones verdaderas:

UNI 2012 II

I. Aída está a la izquierda de Teo.
II. Aída está a la derecha de Luz.
III. Sam está al lado de Mía.

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) II y III

23. Seis amigas se sientan alrededor de una mesa circular con asientos distribuidos simétricamente. Se sabe que:
 - Doris no está sentada frente a Carlota ni a Estela.
 - Carlota está sentada junto y a la derecha de Ángela.
 - Ángela está sentada frente a Blanca.
 - Doris está al lado de Estela.

 ¿Quién está frente a Frida?

 A) Carlota B) Ángela C) Estela
 D) Blanca E) Doris

24. Cuatro amigas tienen diferentes mascotas y diversas ocupaciones. Se sabe que:
 - Ana no es bailarina y no le gustan los gatos.
 - Bety, Carla y la cantante estudiaron primaria con Doris.
 - Bety no es pintora y no le gustan las tortugas.
 - La dueña del gato y Carla no son actrices.
 - La dueña del loro y Ana no son pintoras.
 - Doris le ha preguntado a la actriz, si su perro está vacunado.

 ¿Quién es la actriz y quién tiene al loro?

 A) Bety - Carla B) Carla - Bety
 C) Doris - Carla D) Ana - Bety
 E) Bety - Ana

25. Un grupo de 6 amigos conforman un equipo de fulbito. Se sabe que:
 - Antonio, César y Elmer son vecinos del defensa izquierdo.
 - El arquero, el mediocampista y David, tienen la misma edad.
 - Beto no juega de defensa.
 - Fredy no es delantero ni defensa.
 - César es arquero o mediocampista
 - El mediocampista y Beto estudian inglés con César.
 - Elmer es el delantero derecho

 ¿Quién es el defensa derecho?

 A) Fredy B) César C) Beto
 D) Antonio E) Elmer

26. Cinco compañeras desean comprarse un electrodoméstico diferente cada uno.



 Sabiendo que:
 - Ada, Beatriz y la que compró la cocina viven en el mismo distrito.
 - La que compró el televisor, la que compró el refrigerador y Dora, pagaron al contado.
 - Claudia no sabe si comprar la cocina o el horno a microondas.
 - Emma tiene dinero solo para comprar el televisor a color o la cocina.
 - Dora no quiere la lavadora ni la cocina.
 - Beatriz no quiere el televisor a color ni la lavadora.
 - Ada no quiere el televisor a color.

 ¿Quién compró el refrigerador?

 A) Ada B) Emma C) Dora
 D) Claudia E) Beatriz

27. Los obreros Alberto, Bernando, Camilo, Darío y Elmo trabajan en una fábrica desempeñando diversas actividades, tales como chofer, almacenero, portero, despachador y maquinista; además:
 - Alberto puede desempeñarse como almacenero, portero o despachador.
 - Bernardo puede desempeñarse como almacenero, portero o maquinista.
 - Camilo puede desempeñarse como chofer o almacenero.

- Darío puede desempeñarse como despachador.
- Elmo puede desempeñarse como almacenero o despachador.

¿Quién es el que se desempeña como maquinista?

A) Elmo B) Camilo C) Bernardo
D) Alberto E) Darío

28. Tres turistas: Mónica, Paola y Rita, nacidas en Colombia, Ecuador y Chile se encuentran paseando por la plaza de armas de Lima y están hospedadas en Miraflores, Lince y Surco. Además:

- Mónica no nació en Ecuador y se hospeda en Lince.
- Rita es chilena y no se hospeda en Surco.

Entonces:

A) Mónica es ecuatoriana.
B) La que nació en Ecuador se hospeda en Lince.
C) Rita se hospeda en Surco.
D) La que nació en Chile se hospeda en Surco.
E) Paola es ecuatoriana.

29. Marisol, Rosario y Patricia nacieron en mayo, agosto y noviembre de los años 1998, 1999 y 2000, no necesariamente en ese orden. Si se sabe que:

- Las tres nacieron en meses y años diferentes.
- Marisol es la menor.
- La mayor nació en noviembre.
- El cumpleaños de Rosario coincide con el Día de la Madre del presente año.

¿En qué mes y año nació Patricia?

UNMSM 2010-II

A) Mayo de 1999. B) Mayo de 1998.
C) Noviembre de 1998. D) Agosto de 2000.
E) Noviembre de 1999.

30. Seis jugadores de fútbol: Ántero, Blas, Claudio, Darío, Elías y Federico juegan para un equipo de fulbito.



Sabiendo que:

- Ántero, Blas y el arquero tienen la misma edad.
- Claudio es el defensa derecho.
- Ántero, Darío, Federico y el defensa izquierdo gustan del rock.
- Blas, el delantero derecho y el defensa izquierdo son hinchas del Boca Junior.
- Darío, el delantero derecho y el arquero usan el mismo tipo de zapatillas.
- El mediocampista está enamorado de la hermana de Blas.

¿Quién es el delantero izquierdo?

A) Federico B) Elías C) Darío
D) Blas E) Ántero

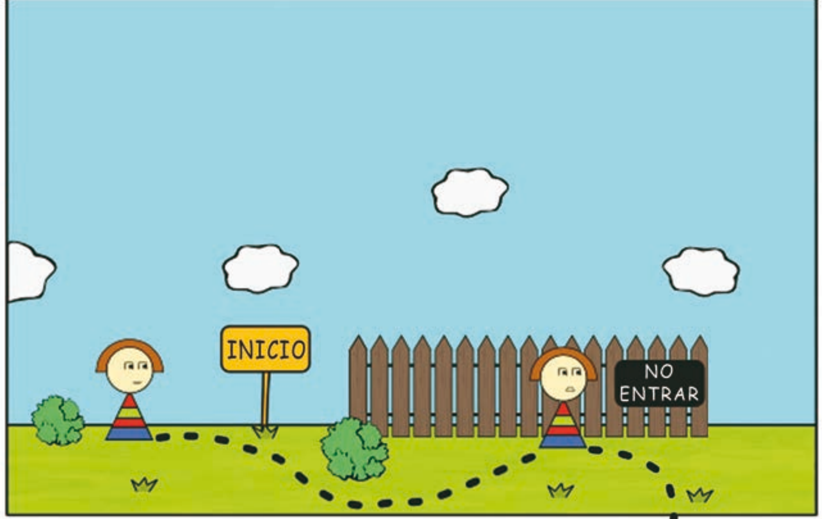
Claves

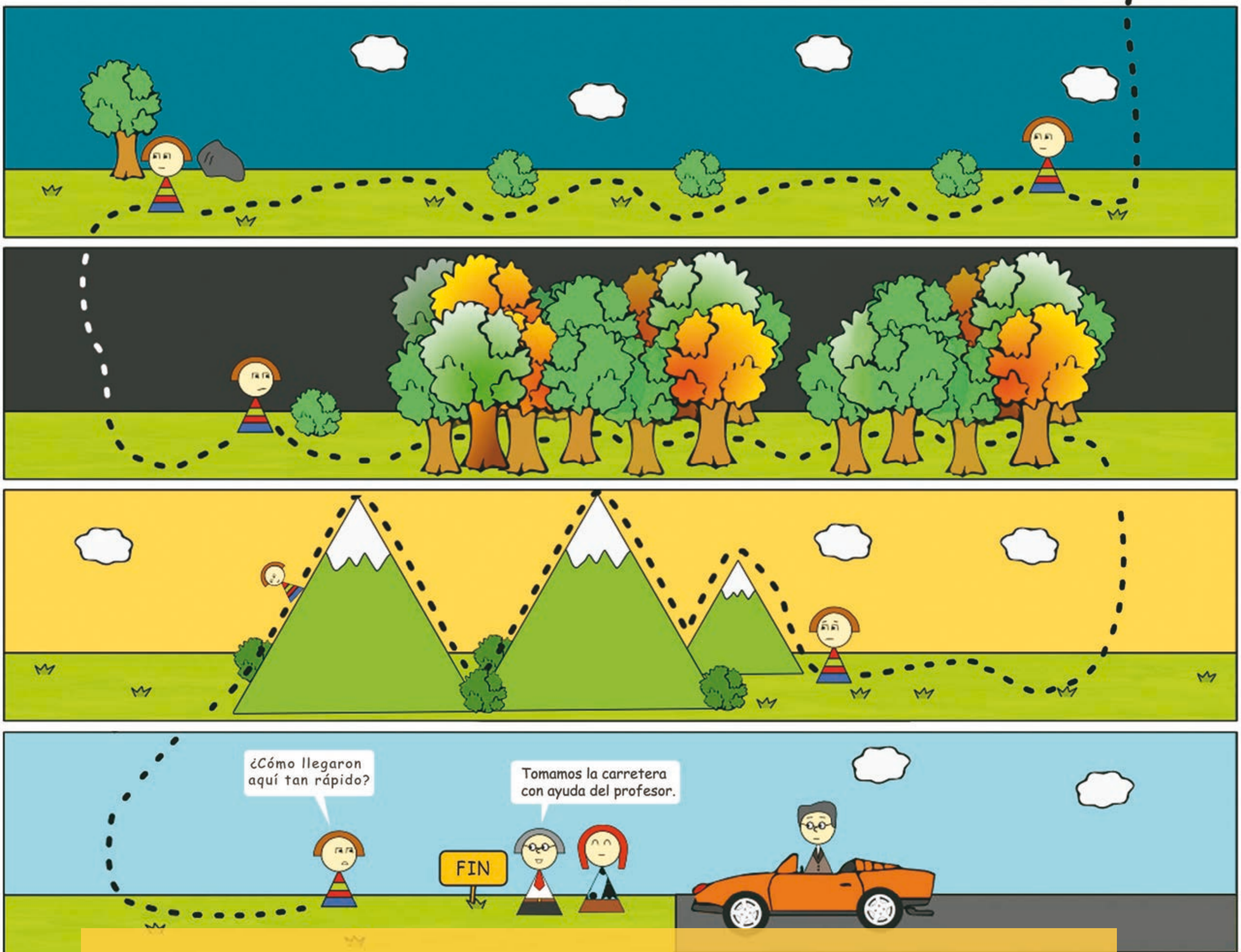
NIVEL 1
1. E
2. B
3. B
4. C
5. E
6. B
7. C
8. E
9. A
10. C

NIVEL 2
11. C
12. E
13. D
14. A
15. A
16. D
17. A
18. E
19. D
20. B

NIVEL 3
21. C
22. D
23. E
24. A
25. D
26. E
27. C
28. E
29. C
30. D

UNIDAD 3





Tomar un atajo

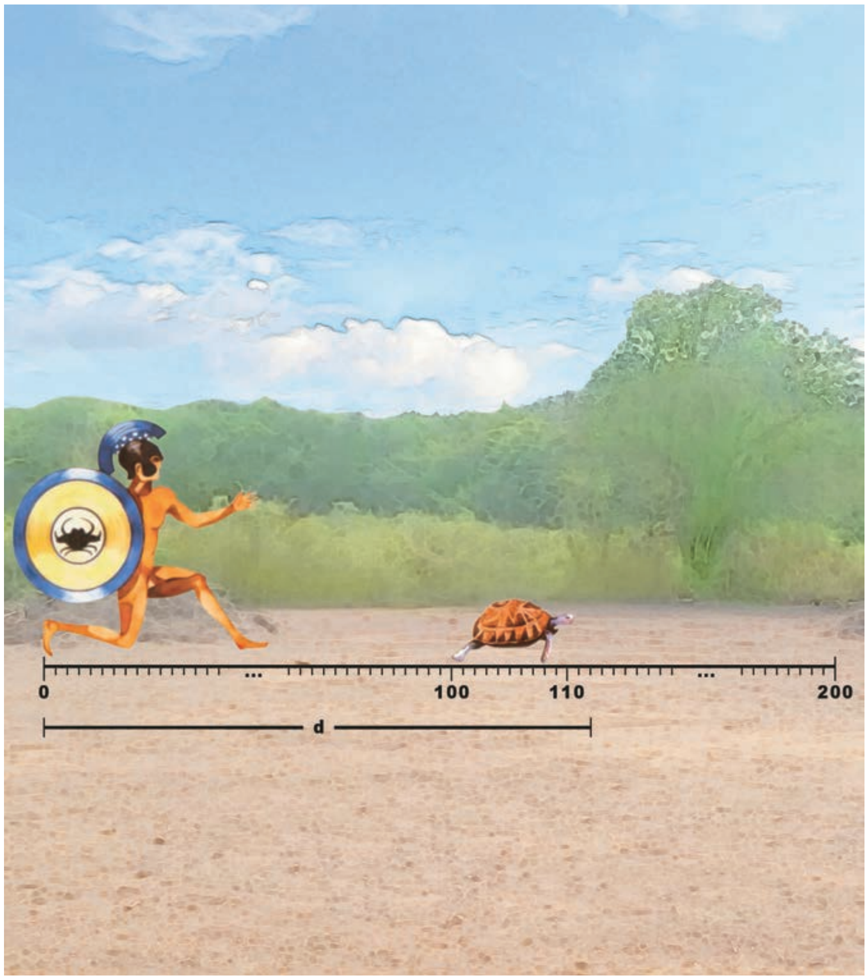
El matemático demuestra. Pero hay distintos caminos para llegar a la demostración, algunos son más cortos, otros más largos, algunos son ingeniosos, otros monótonos y repetitivos, algunos son de los que te hacen pensar y dar un buen rodeo hasta llegar a la prueba y otros, bueno, en otros puedes coger el atajo del profesor.

Sin embargo, son más gratificantes los que haces sin ayuda, además, no siempre vas a tener a alguien que tenga la llave de la demostración.

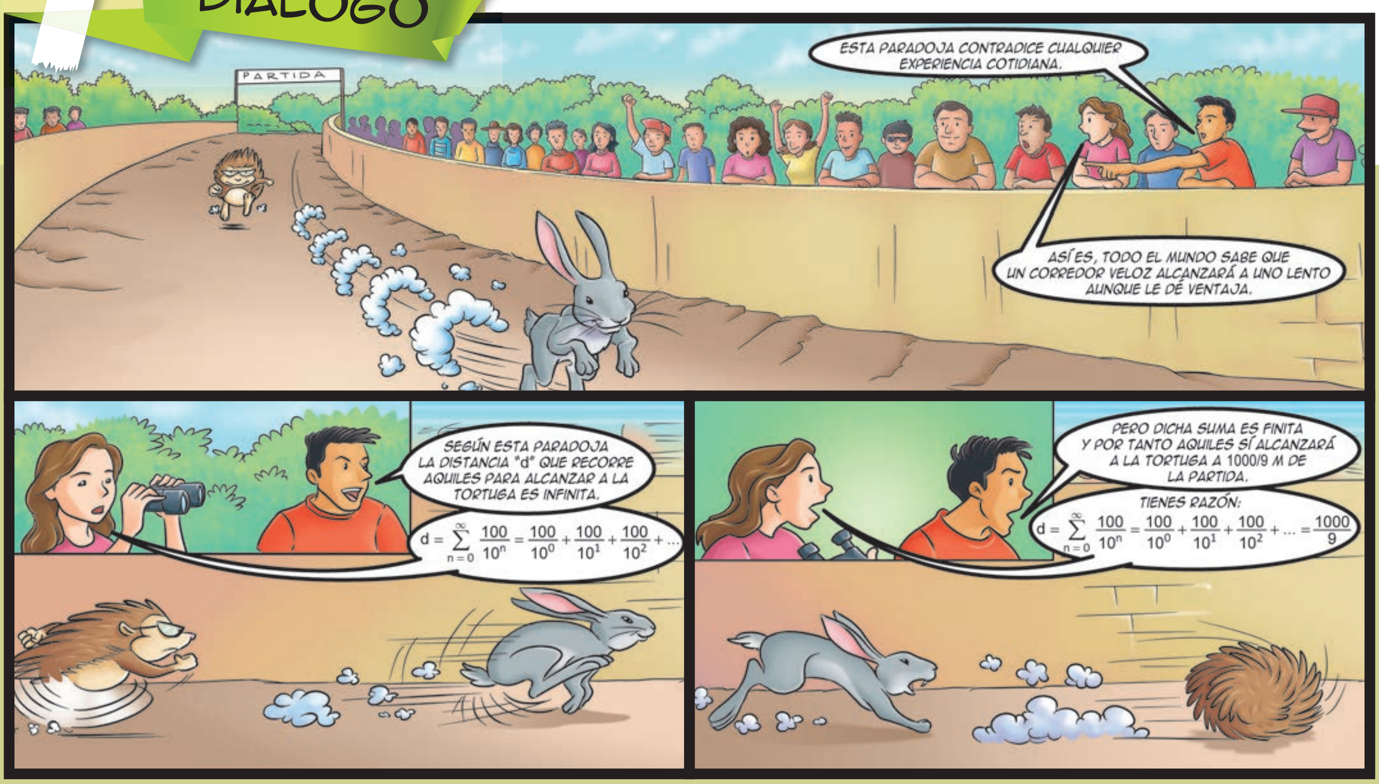
Matemática recreativa

Paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles y una tortuga juegan una carrera. La distancia a recorrer es de 200 metros. Como la velocidad de Aquiles es 10 veces la velocidad de la toruga, arreglan que le dará 100 metros de ventaja. Los dos se ponen en posición, y empieza la carrera. Aquiles empieza a correr, y avanza los 100 metros que le dio de ventaja a la tortuga. Pero en ese tiempo, la tortuga ya avanzó 10 metros, de modo que todavía lo aventaja. Cuando Aquiles recorre esos 10 metros, la tortuga ya avanzó 1 metro más. Aquiles sigue corriendo y avanza ese metro, pero la tortuga en el mismo tiempo ya ha avanzado 10 centímetros. Así siguen corriendo, sin que Aquiles pueda alcanzar nunca a la tortuga.



DIÁLOGO



Sucesiones

Atención

Número de términos (n):

$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

Ejemplo:
Halla el número de términos en:
6 ; 10 ; 14 ; 18 ; 22 ; ...; 62
(diferencias: 4, 4, 4, 4)

$r = 4;\ t_1 = 6;\ t_n = 62$

$$n = \frac{62 - 6}{4} + 1 \Rightarrow n = 15$$



Recuerda

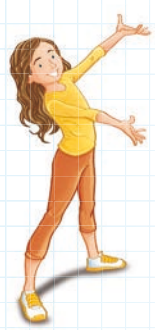
Término central (t_c)

$$t_c = \frac{t_1 + t_n}{2}$$

Ejemplo:
Halla el término central en:
13 ; 16 ; 19 ; ... ; 163
(diferencias: 3, 3)

$r = 3;\ t_1 = 13;\ t_n = 163$

$$t_c = \frac{13 + 163}{2} \Rightarrow t_c = 88$$



DEFINICIÓN

Es un conjunto de números o letras cuyos elementos están ordenados de acuerdo a cierta relación llamada "ley de formación o de recurrencia". Los elementos de este conjunto se llaman términos de la sucesión.
Las sucesiones pueden ser:

1. Sucesiones numéricas
2. Sucesiones alfabéticas
3. Sucesiones gráficas

SUCESIONES NUMÉRICAS

Es una sucesión formada exclusivamente por números cuyos elementos guardan entre sí una determinada relación.

Sucesión de primer orden

También se le conoce como sucesión lineal o progresión aritmética (PA).

Ejemplo:

1.°	2.°	3.°	4.°	5.°
↓	↓	↓	↓	↓
12	17	22	27	32

+5 +5 +5 +5 ⟵ r = 5

Luego:

$t_1 = 12$
$t_2 = 17 \Rightarrow t_2 = 12 + 5(1)$
$t_3 = 22 \Rightarrow t_3 = 12 + 5(2)$
$t_4 = 27 \Rightarrow t_4 = 12 + 5(3)$
$t_5 = 32 \Rightarrow t_5 = 12 + 5(4)$
⋮
$t_n = ? \Rightarrow t_n = 12 + 5(n - 1)$ (12 ↓ t_1; 5 ↓ r)

Por lo tanto, el término enésimo se calcula así:

$$t_n = t_1 + (n - 1)r$$

Donde:
t_1: primer término
t_n: término enésimo
n : número de términos
r : razón

Ejemplo:
Halla el término enésimo en: 86; 83; 80; 77; ...

Resolución:

86 ; 83 ; 80 ; 77

−3 −3 −3

$r = -3; t_1 = 86$

$$t_n = 86 + (n - 1)(-3)$$
$$t_n = 86 - 3n + 3$$
$$\therefore\ t_n = 89 - 3n$$

Sucesión de segundo orden

También se le conoce como sucesión cuadrática. Su término enésimo es de la forma:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

Donde a, b y c son valores constantes, los cuales podemos determinar mediante la siguiente regla:

t_0 ⋮ t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 ; t_5 ; ...; t_n

p_0 ⋮ p_1 p_2 p_3 p_4

r ⋮ r r r

$a = \frac{r}{2}$ $b = p_0 - a$ $c = t_0$

Ejemplo:
Halla el término enésimo en: 4; 10; 20; 34; 52; ...

Resolución:

2 ⋮ 4 ; 10 ; 20 ; 34 ; 52

2 ⋮ 6 10 14 18

4 ⋮ 4 4 4

$a = \frac{4}{2} = 2; b = 2 - 2 = 0; c = 2$

$$t_n = 2n^2 + 0n + 2$$
$$\therefore\ t_n = 2n^2 + 2$$

Sucesión geométrica

También se le conoce como progresión geométrica. Su término enésimo es de la forma:

$$t_n = t_1q^{n-1}$$

Donde:
t_1: primer término
t_n: término enésimo
q: razón de la PG

Nota

Halla t_n y el vigésimo término, en:

2 ⋮ 7 ; 16 ; 29 ; 46 ; ...

5 ⋮ 9 13 17

4 ⋮ 4 4

$a = \frac{4}{2} = 2; b = 5 - 2 = 3$

$c = 2$

Luego:

$t_n = 2n^2 + 3n + 2$

$t_{20} = 2(20)^2 + 3(20) + 2$

$\therefore t_{20} = 862$

Observación

- En una PG se cumple que el producto de términos equidistantes tiene un resultado constante.
- Si la PG tiene un número impar de términos; entonces el término central es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.



Ejemplo:

Halla el término enésimo en: 40; 10; $\frac{5}{2}$; $\frac{5}{8}$; ...

Resolución:

$$40 \; ; \; 10 \; ; \; \frac{5}{2} \; ; \; \frac{5}{8}$$

$$\times\frac{1}{4} \qquad \times\frac{1}{4} \qquad \times\frac{1}{4}$$

$t_1 = 40 \;\wedge\; q = \frac{1}{4}$

$\therefore\; t_n = 40\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

> **Importante**
>
> Toda sucesión alfabética no tiene fin, pues si llega a la Z, continúa A, después B, luego C, es decir, se repite el alfabeto, así:
> X; Y; Z; A; B; C...



SUCESIONES ALFABÉTICAS

Son sucesiones cuyos términos son letras que guardan una determinada ley de formación.

Ejemplos:

1. ¿Qué letra continúa en la sucesión B; L; E; O; H; S; K;...?

MNÑ PQR TUV

B ; L ; E ; O ; H ; S ; K ; (W)

CD FG IJ

2. Determina el término que continúa, en: B; Y; F; T; J; O; ...

CDE GHI KLM

B ; Y ; F ; T ; J ; O ; (N)

UVWX PQRS

> **Nota**
>
> Sentido convencional de giro:
>
> Sentido antihorario
>
> Sentido horario

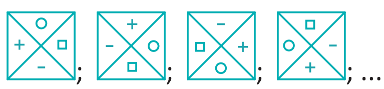


SUCESIONES GRÁFICAS

Son aquellas que están conformadas por figuras ordenadas de acuerdo a ciertos criterios que determinan cada figura de la sucesión.

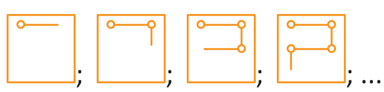
Ejemplos:

1. ¿Qué figura sigue en la sucesión?

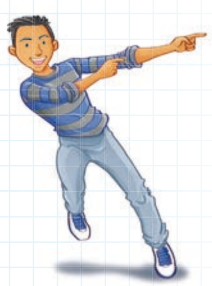


Respuesta: 

2. ¿Qué figura continúa en la sucesión?



Respuesta: 



Problemas resueltos

1 ¿Qué número sigue en la sucesión

1; 2; 6; 15; 33; 66; ...?

Resolución:

1 ; 2 ; 6 ; 15 ; 33 ; 66 ; ◯

+1 +4 +9 +18 +33 56

+3 +5 +9 +15 +23

+2 +4 +6 +8

+2 +2 +2

∴ El número que sigue es: $66 + 56 = 122$

2 ¿Qué letra sigue en la sucesión A; C; G; M; ...?

Resolución:

A ; C ; G ; M ; ◯

B — D E F — H I J K L — N Ñ O P Q R S

∴ La letra que sigue es "T".

3 En la siguiente progresión geométrica, halla el valor de k:

$(3k + 1); (k - 3); (2k + 9); ...$

Resolución:

En toda progresión geométrica el cociente de dos términos consecutivos es constante:

$$\frac{k-3}{3k+1} = \frac{2k+9}{k-3}$$

$$k^2 - 6k + 9 = 6k^2 + 29k + 9$$

$$5k^2 + 35k = 0$$

$$5k(k + 7) = 0$$

$$\underbrace{5k = 0}_{\neq 0} \lor k + 7 = 0$$

$\therefore k = -7$

4 En una progresión aritmética de razón 2/5, el décimosexto término es 40. Halla el primer término.

Resolución:

Sea la sucesión $t_1; t_2; t_3; ... ; t_{15}; 40$ cuya razón es 2/5.

Sabemos que: $t_n = t_1 + (n - 1)r$

Reemplazando: $\underbrace{t_{16}} = t_1 + (16 - 1)\frac{2}{5}$

$$40 = t_1 + 15 \times \frac{2}{5}$$

$$40 = t_1 + 6$$

$\therefore t_1 = 34$

5 El 6.° término de una PG es 48 y el 12.° término es 3072. Halla la razón.

Resolución:

Sea: $t_1; t_2; ...; t_5; 48; t_7; ...; t_{11}; 3072$ la progresión geométrica cuya razón es "q".

Sabemos que: $t_n = t_1 q^{n-1}$

$n = 6 \Rightarrow t_6 = t_1q^5$ ... (I)

$n = 12 \Rightarrow t_{12} = t_1q^{11}$ ... (II)

(II) ÷ (I): $\frac{t_{12}}{t_6} = \frac{t_1q^{11}}{t_1q^5}$

$\frac{3072}{48} = q^6 \Rightarrow 64 = q^6 \quad \therefore q = 2$

6 Halla la razón de una progresión aritmética cuyo primer término sea la unidad, tal que los términos de lugares 2; 10 y 34 formen una progresión geométrica.

Resolución:

Sea: $t_1 ; t_2 ; ... ; t_{10} ; ... ; t_{34}$

$t_1 \downarrow 1$; $t_2 \downarrow 1 + a$; $t_{10} \downarrow 1 + 9a$; $t_{34} \downarrow 1 + 33a$

la progresión aritmética de razón "a". Según enunciado: $t_2; t_{10}$ y t_{34} forman una progresión geométrica.

$$\frac{1+9a}{1+a} = \frac{1+33a}{1+9a}$$

Operamos y resulta: $a = \frac{1}{3}$

7 En una PG creciente de tres términos, se multiplica el primer término por 4, el segundo por 7 y el tercero por 6, obteniéndose una PA. Halla la razón de la PG.

Resolución:

Sea: $t_1; t_1q; t_1q^2$ la PG creciente. Se multiplica al primer, segundo y tercer término por 4; 7 y 6, respectivamente.

$4t_1;\ 7t_1q;\ 6t_1q^2$ forman una PA, entonces la diferencia de dos términos consecutivos es constante:

$$7t_1q - 4t_1 = 6t_1q^2 - 7t_1q$$
$$14t_1q = 6t_1q^2 + 4t_1$$
$$7q = 3q^2 + 2$$
$$3q^2 - 7q + 2 = 0$$

$3q \quad -1$

$q \quad -2 \quad \therefore\ q = 2$

8 En una progresión geométrica de 4 términos positivos, el producto del primer término y tercer término es 196. Si el producto del segundo término con el cuarto término es 144, halla el cuarto término.

Resolución:

Sea: $t_1; t_1q; t_1q^2; t_1q^3$

la PG cuya razón es "q".

Datos: $t_1 \times t_1q^2 = 196$

$$t_1^2q^2 = 196$$
$$t_1q = 14$$

$$t_1q \times t_1q^3 = 144$$
$$t_1^2\,q^4 = 144$$
$$t_1q^2 = 12$$

Finalmente, la sucesión es:

$t_1\ ;\ t_1q\ ;\ t_1q^2\ ;\ t_1q^3$

$t_1\ ;\ 14\ ;\ 12\ ;\ t_1q^3$

$q \quad q \quad q \Rightarrow q = \dfrac{6}{7}$

$$\therefore\ t_4 = 12 \times \frac{6}{7} = \frac{72}{7}$$

9 Si: 2^{x+1}; 2^{x+3}; 112 están en PA, calcula el tercer término de la siguiente PG:

x^2; $3m - 12$; m^2

Resolución:

La diferencia de dos términos consecutivos de una PA es constante:

$$2^{x+3} - 2^{x+1} = 112 - 2^{x+3}$$
$$2 \,.\, 2^{x+3} - 2^{x+1} = 112$$
$$2^{x+1}(2 \,.\, 2^2 - 1) = 112$$
$$2^{x+1} \,.\, 7 = 112$$
$$2^{x+1} = 16$$
$$2^{x+1} = 2^4 \Rightarrow x = 3$$

Luego, la PG será: 9; $3m - 12$; m^2

El cociente de dos términos consecutivos de una PG es constante:

$$\frac{3m-12}{9} = \frac{m^2}{3m-12}$$

$$9m^2 - 72m + 144 = 9m^2$$
$$72m = 144 \Rightarrow m = 2$$

$$\therefore\ t_3 = m^2 = 2^2 = 4$$

10 En la siguiente PA: 3; ...; 23; ...; 75, el número de términos que existe entre 3 y 23 es la tercera parte del número de términos que existe entre 23 y 75. Calcula la diferencia entre la razón y el número de términos de la PA.

Resolución:

Según enunciado:

$$\left(\begin{matrix}\text{n.° de términos}\\ \text{entre 3 y 23}\end{matrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{matrix}\text{n.° de términos}\\ \text{entre 23 y 75}\end{matrix}\right)$$

$$\frac{23-3}{r} + 1 - 2 = \frac{1}{3}\left(\frac{75-23}{r} + 1 - 2\right)$$

$$\frac{20}{r} - 1 = \frac{1}{3}\left(\frac{52}{r} - 1\right)$$

$$\frac{60}{r} - 3 = \frac{52}{r} - 1 \Rightarrow \frac{8}{r} = 2 \Rightarrow r = 4$$

Luego: $\begin{matrix}\text{n.° de términos}\\ \text{de la PA}\end{matrix} = \dfrac{75-3}{4} + 1 = 19$

Piden: n.° términos – razón

$$19 - 4 = 15$$

Actividades de razonamiento

1. Halla x, en:
–1; 1; 4; 9; 17; x

A) 29 B) 20 C) 27 D) 25 E) 24

2. Halla x, en:
2; 4; 7; 8; 12; 12; x

A) 16 B) 20 C) 17 D) 18 E) 13

3. Halla la letra que continúa, en:
A; D; G; J; M; ...

A) O B) R C) C D) J E) P

4. Halla el término que sigue en la sucesión:
2; 5; 11; 23; 47; 95; ...

A) 210 B) 188 C) 191 D) 120 E) 204

5. Indica el número que continúa, en:
2; 7; 22; 67; ...

A) 207 B) 202 C) 201 D) 205 E) 200

6. ¿Qué número sigue en la sucesión
3; 7; 15; 31; ...?

A) 36 B) 93 C) 63 D) 55 E) 129

7. ¿Qué número sigue en:
15; 19; 28; 44; ...?

A) 45 B) 80 C) 69 D) 52 E) 70

8. Calcula $x + y$, en:
1; 5; 4; 10; 7; 17; 10; 26; x; y

A) 48 B) 54 C) 50 D) 52 E) 46

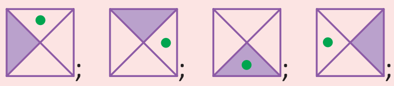
9. Halla x, en:
2; 10; 13; 12; 8; x

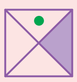
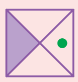
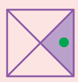
A) 5 B) 14 C) 7 D) 2 E) 3

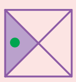
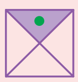
10. Halla x, en:
6; 14; 14; 14; 32; 96; x

A) 204 B) 244 C) 184 D) 196 E) 214

11. Halla la figura que sigue en la sucesión:



A)  B)  C) 

D)  E) 

12. Calcula el número de términos de la sucesión:
2; 5; 8; 11; ...; 95

A) 90 B) 64 C) 32 D) 30 E) 20

13. Halla el término enésimo de:
4; 13; 28; 49; ...

A) $3n^2 + 1$ B) $2n + 3$ C) $2n + 2$
D) $n + 3$ E) $n^2 + 3$

14. Halla el valor de x en la siguiente sucesión aritmética:
5; (20 − 2a); ...; (2a + 40); 11x

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

Claves

1. A 2. C 3. A 4. C 5. B 6. C 7. C 8. C 9. D 10. B 11. A 12. C 13. A 14. A

Reto



En un laboratorio, se estudian dos tipos de bacterias por separado.
Las del tipo A, el 1.er día son 3; el 2.° día aumentan a 6, el 3.er día son 11; el 4.° día son 18 y así sucesivamente.
Las del tipo B, el mismo 1.er día son 10; el 2.° día son 11; el 3.er día son 13; el 4.° día son 16 y así sucesivamente. Halla el día en que las bacterias del tipo A son el doble de las del tipo B.

Rpta.: 18

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. ¿Qué número sigue en la sucesión?
13; 20; 28; 37; 47; ...

A) 56 B) 60 C) 59 D) 58 E) 63

2. ¿Qué número sigue en la sucesión?
60; 12; 3; 1; ...

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

3. ¿Qué letra continúa en la sucesión?
K; M; Ñ; P; R; T; ...

A) V B) W C) Q D) D E) O

4. Halla la suma de los dos términos que continúan:
–3; 0; 0; 2; 3; 4; 6; 6; ...

A) 16 B) 17 C) 18 D) 19 E) 11

5. ¿Qué número sigue en la sucesión?
1; 9; 12; 11; 7; ...

A) 15 B) 12 C) 1 D) 11 E) 8

6. ¿Qué número sigue en la sucesión?
1; 2; 3; 5; 11; ...

A) 25 B) 35 C) 15
D) 30 E) 20

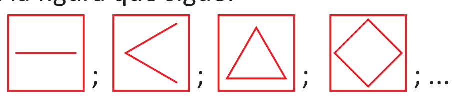
7. Halla el término que continúa:
$\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; ...

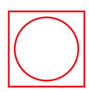
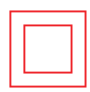
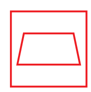
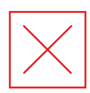
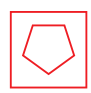
A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{7}{2}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{7}{4}$

8. ¿Qué número continúa?
1; 11; 21; 7; 17; 27; 13; 23; ...

A) 39 B) 49 C) 59
D) 33 E) 29

9. Indica la figura que sigue:



A)  B)  C) 
D)  E) 

10. Halla el término enésimo de la siguiente sucesión:
x; 4; 11; 18; y

A) 37 – 10 B) 5n + 7 C) 4n + 5
D) 7n – 10 E) 7n – 4

NIVEL 2

11. De la siguiente sucesión; halla la suma de cifras del número que sigue:
13; 16; 21; 29; 41; ...

A) 12 B) 15 C) 13 D) 18 E) 10

12. ¿Qué letra sigue en la sucesión?
B; E; H; K; ...

A) L B) M C) N D) J E) O

13. Dada la sucesión:
2; 5; a; 11; 14; b; ...
Halla el valor de: $b - 2a$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 0

14. Halla x, en:
$\frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$; 5; 13; 30; x

UNI 2005 I

A) 65 B) 78 C) 67 D) 81 E) 55

15. ¿Cuál es el producto de los dos términos siguientes en la sucesión mostrada?
4; 11; 8; 7; 12; 3; 16; −1; ...

A) −100 B) 20 C) −8 D) 12 E) −20

16. Halla; $x - y$, de:
2; 1; −1; −2; −4; 4; −7; −8; −x; y

A) 10 B) −6 C) −4 D) 4 E) 6

17. Halla el número que continúa:
2; 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{10}$; ...

A) $\frac{6}{15}$ B) $\frac{1}{20}$ C) $\frac{5}{17}$ D) $\frac{7}{30}$ E) 8

18. Halla el término que continúa:
1; 3; 4; 7; 11; 18; ...

A) 35 B) 29 C) 38 D) 40 E) 22

19. ¿Qué número continúa?
2; 3; 1; 4; 0; ...

A) 1 B) 5 C) 12 D) −1 E) 3

20. Halla $x + y$, de sucesión:
5; 6^4; 12^{10}; 15^{22}; 60^{46}; x^y

A) 157 B) 158 C) 159 D) 160 E) 161

NIVEL 3

21. ¿Cuál es el término que sigue en la sucesión?
NA; JC; FF; ...

A) AJ B) AK C) BK D) BJ E) AI

22. Halla x + y, de la sucesión:
x; 1; 19; 45; 75; 107; y

A) 130 B) 133 C) 136 D) 139 E) 141

23. Indica la letra que corresponde a la primera posición en la sucesión:
...; M; S; V; U

A) B B) C C) F D) G E) J

24. ¿Qué letra sigue?
T; M; I; G; ...

A) B B) C C) D D) E E) F

25. ¿Qué letra continúa?
X; O; I; D; ...

A) B B) C C) Q D) A E) S

26. Halla M + N + P, en la sucesión:
$-M; 2; 8; 12; 19; \overline{NP}; 30; 32; 41$

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

27. En la siguiente sucesión geométrica:
$\frac{1}{2}; x; y; \frac{1}{8}; \ldots$
calcula el término que ocupa el lugar decimonoveno.

A) $\frac{1}{2^{15}}$ B) $\frac{1}{2^{12}}$ C) $\frac{1}{2^{13}}$ D) $\frac{1}{2^{14}}$ E) $\frac{1}{2^{11}}$

28. ¿Cuántos términos de la sucesión tienen raíz cuadrada exacta?
13; 16; 19; ...; 613

A) 7 B) 2 C) 6 D) 10 E) 14

29. En la sucesión aritmética; ¿cuántos términos son cubos perfectos?
7; 14; 21; ...; 343 000

A) 7 B) 18 C) 2 D) 10 E) 9

30. En la siguiente sucesión; calcula el décimo término.
2; 10; 30; 62; 106; ...

A) 604 B) 606 C) 504 D) 706 E) 506

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2	NIVEL 3	
1. D	9. E	11. C	17. A	25. D
2. B	10. D	12. C	18. B	26. C
3. A		13. A	19. B	27. C
4. B		14. A	20. C	28. E
5. C		15. A	21. D	29. D
6. B		16. B	22. D	30. E
7. A			23. A	
8. D			24. D	

Series y sumatorias

Atención

Veamos una aplicación:
Halla el valor de S:

$S = 3 + 6 + 9 + 12 + ... + 207$ (diferencias: 3, 3, 3)

$n = \frac{207 - 3}{3} + 1 = 69$

Luego:

$S = \left(\frac{3 + 207}{2}\right) \times 69$

$\therefore\ S = 7245$



SERIES

Es la suma indicada de los términos de una sucesión, cuando tenga sentido la suma.

Sea la sucesión numérica: $t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4;\ ...\ ;\ t_n$

Entonces, la serie es: $S = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + ... + t_n$

Donde t_n es el término enésimo de la misma.

Ejemplos:

1. $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \Rightarrow$ serie finita
2. $M = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + ... \Rightarrow$ serie infinita

Serie aritmética

Dada una sucesión aritmética: $t_1;\ t_2;\ t_3;\ ...;\ t_n$

Entonces la serie aritmética es: $S_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$ (de término a término: $+r$, $+r$)

Se sabe que: $$t_n = t_1 + (n - 1)r$$

Despejando "n": $$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

Luego: $$S_n = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right)n$$

Donde:

S_n: valor de la serie

n : número de términos

t_1 : primer término

t_n: último término

r : razón aritmética

Atención

Veamos un ejemplo:
Halla el valor de S:

$S = \underbrace{2 + 4 + 8 + 16 + ...}_{12\ \text{términos}}$

$S = 2 + 4 + 8 + 16 + ...$ (de término a término: ×2, ×2, ×2)

$S = \left(\frac{2^{12} - 1}{2 - 1}\right) \times 2$

$\therefore\ S = 8190$



Serie geométrica

Serie geométrica finita

Dada una sucesión geométrica finita: $t_1;\ t_2;\ t_3;\ ...;\ t_n$

Entonces la serie geométrica es: $S_n = t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_n$ (de término a término: $\times q$, $\times q$)

Se sabe que: $$t_n = t_1 q^{n-1}$$

Luego: $$S_n = \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) . t_1$$

Donde:

S_n: valor de la serie

n : número de términos

t_n: último término

q : razón geométrica

Serie geométrica decreciente infinita

Dada una sucesión decreciente infinita (la razón "q" / $0 < |q| < 1$)

$$t_1; t_2; t_3; \ldots$$

Entonces la serie es: $S = t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$ (cada término se obtiene multiplicando el anterior $\times q$)

Luego: $$S = \frac{t_1}{1 - q}$$

Series notables

1. Suma de los "n" primeros números naturales consecutivos.

$$S = \underbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n}_{\text{"n" términos}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Suma de los "n" primeros números pares consecutivos.

$$S = \underbrace{2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n}_{\text{"n" términos}} = n(n+1)$$

3. Suma de los "n" primeros números impares consecutivos.

$$S = \underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)}_{\text{"n" términos}} = n^2$$

4. Suma de los cuadrados de los "n" primeros números naturales.

$$S = \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2}_{\text{"n" términos}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

5. Suma de los cubos de los "n" primeros números naturales.

$$S = \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3}_{\text{"n" términos}} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

6. Suma de los "n" primeros productos de dos números consecutivos.

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

7. Suma de potencias.

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

8. Suma de los términos de una serie geométrica decreciente ilimitada.

$$S = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots$$

(cada término se obtiene multiplicando el anterior $\times q$)

$$S = \frac{t_1}{1 - q}$$



Atención

Ejemplo:
Halla el valor de S:

$S = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ (razones: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$)

$S = \dfrac{8}{1 - \frac{1}{4}}$

$\therefore S = \frac{32}{3}$

Nota

Para fines prácticos, el último término se iguala a $2n$, y despejando se obtiene el valor de "n".

Nota

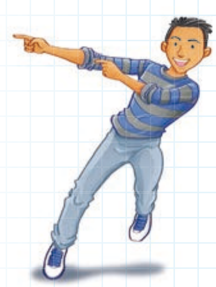
Para fines prácticos, el último término se iguala a $2n - 1$ y se despeja "n".

Nota

Para fines prácticos, el último término se iguala a n^2 y se despeja "n".

Nota

Para fines prácticos, el último término se iguala a n^3 y se despeja "n".



Nota

También:

$S = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$

$S = \dfrac{a^{n+1} - a}{a - 1}$

SUMATORIAS

Sea la sucesión: $t_n; t_{n+1}; t_{n+2}; t_{n+3}; \ldots ; t_m$

La suma de los términos será:

$$t_n + t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \ldots + t_m = \sum_{i=n}^{m} t_i$$

Donde:

Σ: notación sigma. Nos representa la suma de los términos de la forma t_i de dicha sucesión.

t_i: nos representa uno de los términos de la sucesión, dependiendo del valor de i.

$i = n \Rightarrow t_i = t_n$
$i = n + 1 \Rightarrow t_i = t_{n+1}$
$i = n + 2 \Rightarrow t_i = t_{n+2}$
$\vdots$
$i = m \Rightarrow t_i = t_m$

i toma valores desde n hasta m.

$i = n \Rightarrow$ límite inferior de la sumatoria

$i = m \Rightarrow$ límite superior de la sumatoria



Recuerda

La expresión en el lado derecho de la igualdad se denomina "sumatoria" y constituye una forma abreviada de escribir la serie.

Propiedades

1. Número de términos de la sumatoria.

$$\sum_{i=n}^{m} t_i \Rightarrow \text{n.° términos} = m - n + 1$$

2. Si **k** es un valor constante.

$$\sum_{i=n}^{m} kt_i = k\sum_{i=n}^{m} t_i$$

3. a_i; b_i son términos que dependen de la variable i.

$$\sum_{i=n}^{m} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=n}^{m} a_i \pm \sum_{i=n}^{m} b_i$$

4. Sumatoria de una constante (k = cte.)

$$\sum_{i=n}^{m} k = k\,(\text{n.° términos}) = k(m - n + 1)$$

5. Desdoblando la sumatoria.

$$\sum_{i=n}^{m} t_i = \sum_{i=n}^{n+p} t_i + \sum_{i=n+p+1}^{m} t_i$$

Nota

Veamos algunos ejemplos:

- $\sum_{i=23}^{80} t_i \Rightarrow$ N.° términos $= 80 - 23 + 1 = 58$
- $\sum_{i=4}^{7} 2i = 2\sum_{i=4}^{7} i$
- $\sum_{i=1}^{4} (3i + i^2) = \sum_{i=1}^{4} 3i + \sum_{i=1}^{4} i^2$
- $\sum_{i=4}^{8} 10 = 10(8 - 4 + 1) = 50$

Problemas resueltos

1 Si: $S_1 = \underbrace{1 + 5 + 9 + ... + a}_{20 \text{ términos}}$

$S_2 = \underbrace{3 + 7 + 11 + ... + b}_{15 \text{ términos}}$

Halla: $S_1 - S_2$

Resolución:

Hallemos el vigésimo término de S_1

$a = 1 + (20 - 1)4$

$a = 1 + 19 \times 4$

$a = 77$

Luego: $S_1 = \left(\frac{1 + 77}{2}\right) \times 20$

$S_1 = 780$

Hallamos el décimoquinto término de S_2:

$b = 3 + (15 - 1)4$

$b = 3 + 14 \times 4$

$b = 59$

Luego: $S_2 = \left(\frac{3 + 59}{2}\right) \times 15$

$S_2 = 465$

Piden: $S_1 - S_2 = 780 - 465 = 315$

2 Calcula el valor de "S":

$S = 9 + 12 + 17 + 24 + ... + 177$

Resolución:

(8)	9	12	17	24	177
	(1)	3	5	7	
		(2)	2	2	

$r = 2$; $p_0 = 1$; $t_0 = 8$

$a = \frac{2}{2} = 1$; $b = 1 - 1 = 0$; $c = 8$

Luego: $t_n = n^2 + 8$

Igualamos $n^2 + 8$ y 177 para calcular el número de términos.

$n^2 + 8 = 177$

$n^2 = 169 \Rightarrow n = 13$

$$S = \sum_{i=1}^{13}(n^2 + 8) = \sum_{i=1}^{13} n^2 + \sum_{i=1}^{13} 8$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 8n$$

$$= \frac{13 \times \overset{7}{\cancel{14}} \times \overset{9}{\cancel{27}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} + 8 \times 13$$

$$= 13 \times 63 + 104$$

$\therefore S = 923$

3 Halla el valor de S:

$S = 7 + 77 + 777 + ... + \underbrace{777 ... 77}_{20 \text{ cifras}}$

Resolución:

Multiplicamos por $\frac{9}{7}$:

$\frac{9}{7}S = 9 + 99 + 999 + ... + 999 ... 99$

$\frac{9}{7}S = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + ... + (10^{20} - 1)$

$\frac{9}{7}S = \underbrace{10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^{20}} - 20$

$\frac{9}{7}S = \frac{10^{21} - 10}{10 - 1} - 20$

$\frac{9}{7}S = \frac{10^{21} - 10}{9} - 20$

$\frac{9}{7}S = \frac{10^{21} - 10 - 180}{9}$

$\therefore S = \frac{7}{81}(10^{21} - 190)$

4 Halla el valor de "S", si:

$$S = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + ...$$

Resolución:

Aplicando: $S_L = \dfrac{t_1}{1-q}$

$$S = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$\therefore S = \frac{1}{6}$$

5 Determina el valor de "a", si:

$$\sum_{k=1}^{9}(k - a) = 18$$

Resolución:

Aplicando propiedades de sumatorias:

$$\sum_{k=1}^{9} k - \sum_{k=1}^{9} a = 18$$

$$\frac{k(k+1)}{2} - ak = 18$$

$$\frac{9(10)}{2} - 9a = 18$$

$$45 - 9a = 18$$

$$27 = 9a \quad \therefore \; a = 3$$

6 Calcula el valor de P, si:

$$P = \sum_{k=1}^{19}(2k^2+6) - \sum_{k=1}^{19}(k^2-4) + \sum_{k=1}^{19}(2k-9)$$

Resolución:

Expresando en un solo índice:

$$P = \sum_{k=1}^{19}(2k^2 + 6 - (k^2 - 4) + 2k - 9)$$

$$P = \sum_{k=1}^{19}(2k^2 + 6 - k^2 + 4 + 2k - 9)$$

$$P = \sum_{k=1}^{19}(k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=1}^{19}k^2 + 2\sum_{k=1}^{19}k + \sum_{k=1}^{19}1$$

$$P = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{2k(k+1)}{2} + k$$

Reemplazamos: $k = 19$

$$P = \frac{19(19+1)(2 \cdot 19+1)}{6} + 19(19+1) + 19$$

$$\therefore \; P = 2869$$

7 La suma de todos los números naturales desde "n" hasta "5n" es 1230.
Calcula el valor de "n" y da como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Sea la serie: $\underbrace{n + ... + 5n}_{(5n - n + 1) \text{ términos}}$

Por dato: suma = 1230

$$\left(\frac{n+5n}{2}\right)(5n - n + 1) = 1230$$

$$3n(4n+1) = 1230$$

$$n(4n+1) = 410$$

$$n(4n+1) = 10 \times 41$$

$$\Rightarrow n = 10$$

$\therefore$ Suma de cifras $= 1 + 0 = 1$

8 Si: $\displaystyle\sum_{n=2}^{21}(n^3 - n) = \overline{cabar}$

halla: $a + c + a + b + a + r$

Resolución:

Aplicando propiedades de sumatorias:

$$\sum_{n=2}^{21} n^3 - \sum_{n=2}^{21} n = \overline{cabar}$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 1 - \left\{\frac{n(n+1)}{2} - 1\right\} = \overline{cabar}$$

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - 1 - \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \overline{cabar}$$

Reemplazando: $n = 21$

$$\left(\frac{21(22)}{2}\right)^2 - \frac{21(22)}{2} = \overline{cabar}$$

$$53\,361 - 231 = \overline{cabar}$$

$$53\,130 = \overline{cabar}$$

c = 5 ; a = 3; b = 1; r = 0

Piden: a+c+a+b+a+r=3+5+3+1+3+0=15

9 Calcula el valor de S, si:

$$S=\frac{\sum_{k=1}^{58}(2k+1)}{\sum_{k=1}^{36}(5k-3)-\sum_{k=1}^{30}(5k+27)}$$

Resolución:

Calculamos cada sumatoria

$$\sum_{k=1}^{58}(2k+1)=2\sum_{k=1}^{58}k+\sum_{k=1}^{58}1$$

$$=\cancel{2}\frac{k(k+1)}{\cancel{2}}+k$$

$$=58(59)+58$$

$$=3480$$

$$\sum_{k=1}^{36}(5k-3)=5\sum_{k=1}^{36}k-3\sum_{k=1}^{36}1$$

$$=\frac{5k(k+1)}{2}-3k$$

$$=\frac{5.\overset{18}{\cancel{36}}(37)}{\cancel{2}}-3(36)$$

$$=3330-108$$

$$=3222$$

$$\sum_{k=1}^{30}(5k+27)=5\sum_{k=1}^{30}k+27\sum_{k=1}^{30}1$$

$$=\frac{5k(k+1)}{2}+27k$$

$$=\frac{5.\cancel{30}(31)}{\cancel{2}}+27(30)$$

$$=2325+810$$

$$=3135$$

Reemplazando:

$$S=\frac{3480}{3222-3135}$$

$\therefore$ S = 40

10 Calcula "A + B", si:

$$\frac{\overbrace{111+113+115+...+A}^{\text{"n" términos}}}{\underbrace{1+3+5+7+...+B}_{\text{"n" términos}}}=11$$

Resolución:

Calculamos los valores de A y B:

A = 111 + (n – 1) × 2

A = 111 + 2n – 2

A = 2n + 109

B = 1 + (n – 1) × 2

B = 1 + 2n – 2

B = 2n – 1

Reemplazando:

$$\frac{\left(\frac{111+2n+109}{2}\right)n}{\left(\frac{1+2n-1}{2}\right)n}=11$$

$$\frac{2n+220}{2n}=11$$

$$2n+220=22n$$

$$220=20n \Rightarrow n=11$$

Luego. A = 2(11) + 109 ⇒ A = 131

B = 2(11) – 1 ⇒ B = 21

$\therefore$ A + B = 152

Actividades de razonamiento

1. Calcula:

$$\sum_{k=8}^{20} k^2$$

A) 2620 B) 2370 C) 2340
D) 2760 E) 2730

2. Calcula:

$$\sum_{a=8}^{22} (3a-1)$$

A) 680 B) 690 C) 610 D) 660 E) 670

3. Calcula: $S = 1 + 3 + 5 + ... + 99$

A) 1350 B) 2500 C) 4326
D) 3600 E) 1200

4. Calcula el valor **m** en la siguiente igualdad:
$2 + 4 + 6 + 8 + ... + m = 600$

A) 48 B) 35 C) 42 D) 54 E) 62

5. Halla el valor de "M":
$M = 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + ... + 40^3$

A) 352 800 B) 345 600 C) 350 400
D) 358 200 E) 34 528

6. Calcula la suma de los 25 primeros términos de la serie:
$S = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - ...$

A) 325 B) −325 C) 625
D) 175 E) −175

7. Calcula el valor de "S":
$S = 1^2 - 3^2 + 5^2 - 7^2 + ...$ (20 términos)

A) 700 B) −420 C) −440
D) 600 E) −800

8. Halla el valor de "M":

$$M = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{24}\right) + ...$$

A) $\frac{5}{2}$ B) $-\frac{3}{5}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

9. Halla "S":

$$S = \frac{6}{3} + \frac{10}{9} + \frac{14}{27} + \frac{18}{81} + \ldots$$

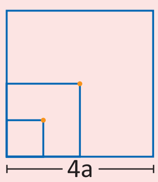
A) 13/3　　B) 4　　C) 5　　D) 12/5　　E) 3

10. Halla el valor de **M**, en:

$$M = \underbrace{2 + 11 + 33 + 74 + 140 + \ldots}_{\text{20 sumandos}}$$

A) 33 200　　B) 51 200　　C) 44 100
D) 38 500　　E) 45 640

11. Determina la suma de las áreas de los infinitos cuadrados formados como muestra la figura (el lado del cuadrado es la mitad del lado del cuadrado anterior).



A) $12a^2$　　B) $\frac{64}{3}a^2$　　C) $\frac{33}{7}a^2$　　D) $\frac{27}{4}a^2$　　E) $10a^2$

12. Halla el valor de S, si:

$$S = 1 \times 2 + 2 \times 5 + 3 \times 10 + 4 \times 17 + \ldots + 10 \times 101$$

A) 3500　　B) 2800　　C) 3080
D) 4100　　E) 3100

13. Calcula:

$$\sum_{k=1}^{20} \sum_{k=1}^{12} 8$$

A) 1920　　B) 1450　　C) 2180
D) 3430　　E) 2150

14. Calcula:

$$S = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{4}{8 \times 12} + \ldots + \frac{30}{437 \times 467}$$

A) $\frac{911}{412}$　　B) $\frac{465}{934}$　　C) $\frac{311}{1217}$
D) $\frac{4}{9}$　　E) $\frac{121}{331}$

Claves

1. E	5. A	9. B	13. A
2. D	6. A	10. E	14. B
3. B	7. E	11. B	
4. A	8. D	12. C	

Reto



Calcula el valor de x; si:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)(2k+1)] + n = x \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Rpta.: 4

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla el valor de x en:
$4 + 7 + 10 + ... + x = 175$

A) 39 B) 28 C) 35 D) 24 E) 31

2. Calcula: $\sum_{k=5}^{11} 2k$

A) 66 B) 118 C) 56 D) 224 E) 112

3. Halla la suma de todos los números pares positivos menores que 100.

A) 2550 B) 2450 C) 4900
D) 5100 E) 5250

4. Calcula:
$\sum_{k=1}^{10}(2k+1)$

A) 120 B) 130 C) 140 D) 150 E) 160

5. ¿Cuál es la suma de todos los números impares positivos de dos cifras?

A) 5100 B) 2750 C) 2475
D) 2525 E) 2550

6. Calcula: $\sum_{k=4}^{9}(12-k)$

A) 55 B) 48 C) 36
D) 33 E) 42

7. ¿Cuántas campanadas da un reloj en un día si señala cada hora con igual número de campanadas y cada media hora con una campanada?

A) 156 B) 180 C) 190
D) 200 E) 144

8. Calcula el valor de:
$\sum_{k=1}^{50}(k) + \sum_{p=1}^{40}(p)$

A) 1275 B) 3042 C) 62 053
D) 2095 E) 48 762

9. Determina el valor de S en:
$S = 2 + 5 + 10 + 17 + ... + 2501$

A) 42 000 B) 42 900 C) 42 500
D) 42 950 E) 42 975

10. Halla el valor de la siguiente suma:
$S = 2 + 6 + 12 + 20 + ... + 600$

A) 2200 B) 6200 C) 3200
D) 4200 E) 5200

NIVEL 2

11. Efectúa:
$S = 1 . 2 + 2 . 3 + 3 . 4 + ... + 20 . 21$

A) 3080 B) 3806 C) 3100
D) 2608 E) 2800

12. Halla la suma total de:
$E = 0,01 + 0,02 + 0,03 + ... + 4$

A) 423 B) 802 C) 852 D) 755 E) 905

13. Halla **n**; en:
$(1 + 2 + 3 + ... + n)(2 + 4 + 6 + ... + 2n) = 6050$

A) 13 B) 12 C) 10 D) 15 E) 11

14. Calcula:
$4 + 16 + 36 + 64 + ... + 2304$

A) 16 900 B) 19 600 C) 57 600
D) 56 700 E) 17942

15. Halla el valor de k en:
$1 + 3 + 5 + 7 + ... + k = 9801$

A) 199 B) 197 C) 179
D) 99 E) 180

16. Halla el valor de:
$$\sum_{k=15}^{35} 8 + \sum_{n=1}^{20} (5n - 4)$$

A) 1122 B) 1050 C) 1138
D) 1218 E) 1238

17. Sabiendo que:
$A = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 50$
$B = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 69$
Halla: A – B

A) 20 B) 22 C) 32
D) 42 E) 50

18. Calcula:
$$S = \sum_{k=1}^{4} (2k - 5)^2$$

A) 25 B) 24 C) 29
D) 18 E) 20

19) Calcula el valor de A, siendo:

$$A = \sum_{k=3}^{8} (k-5)^2$$

A) 19 B) 18 C) 20 D) 21 E) 42

20) Calcula: $\sum_{k=1}^{10} (3k^2 + 2k - 5)$

A) 1045 B) 1135 C) 1120
D) 1200 E) 1215

NIVEL 3

21) Dos hermanas, Juana y María, iniciaron ante la proximidad del verano un régimen de dieta. Juana la lleva a cabo comiendo 13 duraznos cada día, mientras que María la lleva a cabo comiendo 1 durazno el primer día, 2 en el segundo, 3 en el tercero, y así sucesivamente, la dieta terminó cuando ambas habían comido la misma cantidad de duraznos. Si la dieta se inició el 15 de noviembre, ¿qué día terminó?

A) 7 de diciembre B) 8 de diciembre
C) 9 de diciembre D) 11 de diciembre
E) 10 de diciembre

22) En una sucesión lineal la suma de todos los términos en función del número de términos es:

$$S = \frac{3n^2}{2} + \frac{13n}{2}$$

Halla el término 400.

A) 2410 B) 2360 C) 2253
D) 1205 E) 1405

23) Calcula el valor de S:

$$S = 1 + \underbrace{(1+4) + (1+4+7) + (1+4+7+10) + \ldots}_{\text{19 paréntesis}}$$

A) 1535 B) 3400 C) 4200
D) 2400 E) 8600

24) La suma de todos los números de la forma (3k + 2), para k = 1; 2; 3; ...; n, es:

A) $\frac{n(3n+7)}{2}$ B) $\frac{n(3n-7)}{2}$ C) $\frac{3n+2}{2}$

D) $\frac{3n-2}{2}$ E) $\frac{n(3n+5)}{2}$

25) Determina el valor de **n**, si:

$$\sum_{k=n}^{3n} k = 1640$$

A) 18 B) 20 C) 24 D) 25 E) 26

(26) Calcula la suma de cifras de M:

$$M = \sum_{k=1}^{100}(101 - k)k$$

A) 21 B) 20 C) 23
D) 16 E) 24

(27) Si $S_k = \sum_{i=1}^{k} i$, entonces el valor de $\sum_{k=1}^{n} S_k$ es:

UNMSM-2005 II

A) $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ B) $\frac{1}{3}n(n+2)$
C) $\frac{n(n+3)}{4}$ D) $\frac{1}{4}(n+1)^2$
E) $n(n+1)(n+2)$

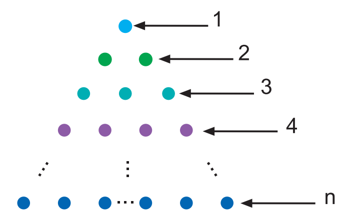
(28) Dos tortugas participan en una carrera. La primera recorre todos los días 4 metros y la segunda recorre el primer día 1 metro, y cada día que sigue recorre un metro más que el día anterior. Si ambas tortugas parten el mismo día y llegan simultáneamente, ¿cuántos días duró la carrera?

A) 10 B) 4 C) 8
D) 7 E) 6

(29) Calcula S, considerando los 100 primeros términos de la serie:
$S = 1 + 3 + 2 + 2 + 6 + 4 + 3 + 9 + 6 \ldots$

A) 2800 B) 2900 C) 3290
D) 3400 E) 3500

(30) Se tienen 120 canicas para formar un triángulo mediante filas, de modo que la primera fila tenga una, la segunda dos, la tercera tres y así sucesivamente. ¿Cuántas filas tendrá dicho triángulo?



A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Claves

NIVEL 1			
1. E	9. E	17. E	25. B
2. E	10. E	18. E	26. D
3. B	NIVEL 2	19. A	27. A
4. A	11. A	20. E	28. D
5. C	12. B	NIVEL 3	29. D
6. D	13. C	21. E	30. E
7. B	14. B	22. D	
8. D	15. B	23. C	
	16. C	24. A	

Analogías y distribuciones numéricas

La analogía matemática es una presentación rectangular de números dispuestos en filas y columnas.
En cada fila se opera con los términos extremos para conseguir el término medio y esto se indica colocando el término medio entre paréntesis; estas mismas operaciones se deben realizar en la fila que contiene a la incógnita para hallar el valor de ella.
Cuando la incógnita no es un término medio ya no se le escribe entre paréntesis y se trata de una distribución numérica que se trabaja de manera similar a una analogía, incluyendo a las distribuciones gráficas donde los números son partes de las figuras.

Ejemplos:

1. ¿Qué número falta en los paréntesis?

64	(15)	7
1	(30)	29
196	( )	3

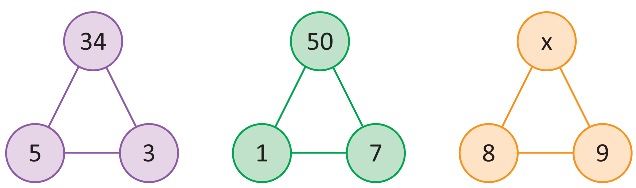
Resolución:
Buscando una relación en cada fila:
1.ª fila: $\sqrt{64} + 7 = 15$
2.ª fila: $\sqrt{1} + 29 = 30$
3.ª fila: $\sqrt{196} + 3 = 17$ $\therefore$ El número que falta es 17.

2. Halla el número que falta, en:

3	4	81
5	3	125
2	9	

Resolución:
La relación en las filas es:
1.ª fila: $3^4 = 81$
2.ª fila: $5^3 = 125$
3.ª fila: $2^9 = 512$ $\therefore$ El número que falta es 512.

3. Calcula "x", en:



Resolución:
Operando con los números que se ubican en los círculos de la base se tiene:
1.ª figura: $5^2 + 3^2 = 34$
2.ª figura: $1^2 + 7^2 = 50$
3.ª figura: $8^2 + 9^2 = 145$ $\therefore$ $x = 145$

Nota

El procedimiento más simple es aquel que tiene menos operaciones respecto a otro.



Recuerda

Existen algunos casos ambiguos donde se pueden hallar dos relaciones diferentes con diferente respuesta. En este caso se elige como respuesta al resultado del procedimiento más simple.

Halla "x" en:

3 (5) 2
5 (9) 4
7 ( ) 4

A) 10 B) 11 C) 25
D) 33 E) 40

$3 + 2 = 5$ ó $3^2 - 2^2 = 5$
$5 + 4 = 9$ ó $5^2 - 4^2 = 9$
$7 + 4 = 11$ ó $7^2 - 4^2 = 33$

En este caso la respuesta con el procedimiento más simple es:
$7 + 4 = 11$

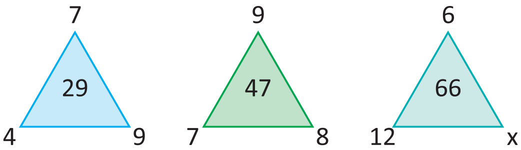


Observación

La figura es algo accesorio del problema, que sirve para la ubicación de los números. Esto se cumple siempre y cuando las 3 figuras sean iguales.

Problemas resueltos

1 Halla "x", en:



Resolución:

1.ª figura: $4 \times 9 - 7 = 29$

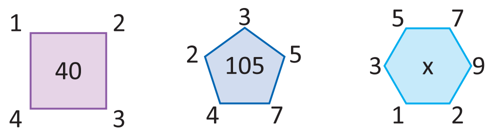
2.ª figura: $7 \times 8 - 9 = 47$

3.ª figura: $12 . x - 6 = 66$

$\Rightarrow 12x = 72 \;\Rightarrow\; x = 6$

$\therefore$ El número que falta es 136.

2 Halla "x", en:



Resolución:

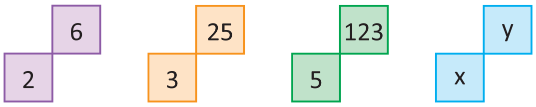
1.ª figura: $(1 + 2 + 3 + 4) \times 4 = 40$

2.ª figura: $(2 + 3 + 5 + 7 + 4) \times 5 = 105$

3.ª figura: $(3 + 5 + 7 + 9 + 2 + 1) \times 6 = 162$

$\therefore x = 162$

3 Calcula "x" e "y", en:



Resolución:

Los números que se ubican en la parte inferior son primos.

Luego:

1.ª figura: $2^3 - 2 = 6$

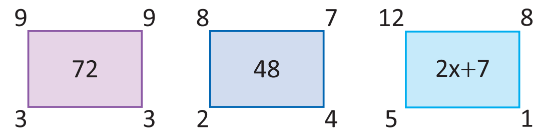
2.ª figura: $3^3 - 2 = 25$

3.ª figura: $5^3 - 2 = 123$

4.ª figura: $7^3 - 2 = 341$

$\therefore x = 7$ e $y = 341$

4 Halla "x", en:



Resolución:

1.ª figura: $9 \times 9 - 3 \times 3 = 72$

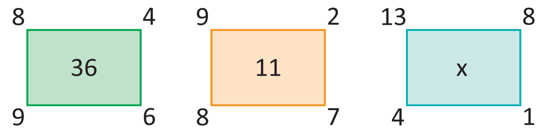
2.ª figura: $8 \times 7 - 2 \times 4 = 48$

3.ª figura: $12 \times 8 - 5 \times 1 = 2x + 7$

$96 - 5 = 2x + 7$

$84 = 2x \;\Rightarrow\; x = 42$

5 Halla "x", en:



Resolución:

1.ª figura: $(8 + 4) \times (9 - 6) = 36$

2.ª figura: $(9 + 2) \times (8 - 7) = 11$

3.ª figura: $(13 + 8) \times (4 - 1) = 63$

$\therefore x = 63$

6 ¿Qué número falta?

3	(13)	2
7	(11)	1
8	( )	3

Resolución:

1.ª fila: $3^2 + 4 = 13$

2.ª fila: $7^1 + 4 = 11$

3.ª fila: $8^3 + 4 = 516$

$\therefore$ El número que falta es 516.

7 ¿Qué número falta?

93	(64)	35
17	(47)	86
46	( )	97

Resolución:

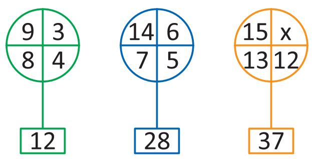
1.ª fila: $\frac{9+3}{2} = 6$; $\frac{3+5}{2} = 4$

2.ª fila: $\frac{1+7}{2} = 4$; $\frac{8+6}{2} = 7$

3.ª fila: $\frac{4+6}{2} = 5$; $\frac{9+7}{2} = 8$

$\therefore$ El número que falta es 58.

8 Halla "x", en:



Resolución:

1.ª figura: $9 \times 4 - 8 \times 3 = 12$

2.ª figura: $14 \times 5 - 7 \times 6 = 28$

3.ª figura: $15 \times 12 - 13x = 37$

$180 - 13x = 37$

$143 = 13x \Rightarrow x = 11$

9 ¿Qué número falta?

349	(37)	628
242	(12)	951
456	( )	127

Resolución:

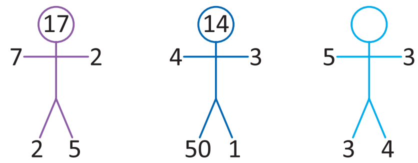
1.ª fila: $\frac{3+9}{4} = 3$; $\frac{6+8}{2} = 7$

2.ª fila: $\frac{2+2}{4} = 1$; $\frac{9+1}{5} = 2$

3.ª fila: $\frac{4+6}{5} = 2$; $\frac{1+7}{2} = 4$

$\therefore$ El número que falta es 24.

10 ¿Qué número falta?



Resolución:

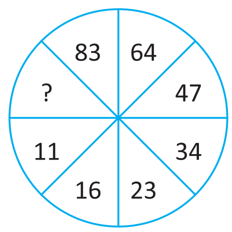
1.ª figura: $7^2 - 2^5 = 17$

2.ª figura: $4^3 - 50^1 = 14$

3.ª figura: $5^3 - 3^4 = 44$

$\therefore$ El número que falta es 44.

11 El número que falta es:



Resolución:

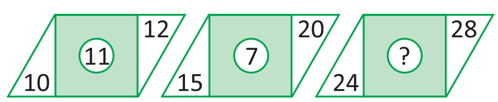
11 16 23 34 47 64 83 x

5 7 11 13 17 19 23

2 4 2 4 2 4

$x = 83 + 23 = 106$

12 Encuentra el término que falta, en:



Resolución:

Fig. ①: $\frac{12+10}{12-10} = \frac{22}{2} = 11$

Fig. ②: $\frac{20+15}{20-15} = \frac{35}{5} = 7$

Fig. ③: $\frac{28+24}{28-24} = \frac{52}{4} = 13 \Rightarrow ? = 13$

Actividades de razonamiento

1. Halla a, en:

6	4	24
8	5	40
3	8	a

A) 24 B) 26 C) 36 D) 40 E) 48

2. Halla el valor de x, en:

4	3	12
5	9	45
6	2	x

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

3. Halla n, en:

8	20	2
5	19	3
1	n	8

A) 18 B) 20 C) 8 D) 9 E) 12

4. ¿Qué número falta?

5	(6)	7
9	(6)	3
8	(?)	6

A) 6 B) 5 C) 3 D) 7 E) 4

5. Halla x, en:

10	17	9
6	12	6
20	4	x

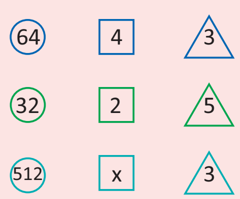
A) 9 B) 12 C) 15 D) 6 E) 8

6. Halla a, en:

12	5	2
60	10	40
70	a	30

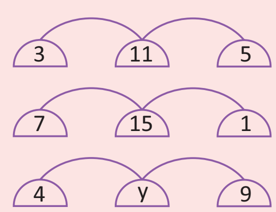
A) 20 B) 25 C) 10 D) 30 E) 32

7. Halla x, en:



A) 1 B) 2 C) 7 D) 8 E) 4

8. Halla y, en:



A) 13 B) 17 C) 21 D) 12 E) 22

9. Halla z, en:

8	2	4	24
10	4	5	30
20	18	7	z

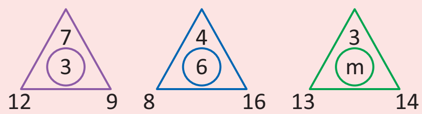
A) 12 B) 16 C) 14 D) 20 E) 24

10. Halla x, en:

28	5	50
12	6	18
48	2	24
17	6	x

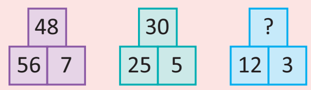
A) 40 B) 36 C) 48 D) 52 E) 60

11. Halla el valor de m^2, en:



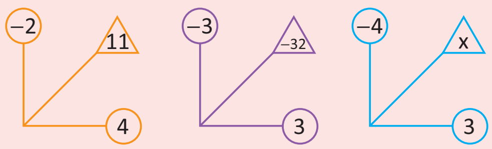
A) 4 B) 81 C) 16 D) 36 E) 25

12. ¿Cuál es el número que falta?



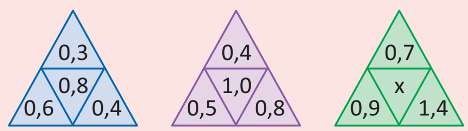
A) 12 B) 18 C) 24 D) 10 E) 16

13. Halla x, en:



A) –69 B) 48 C) 55 D) 35 E) –40

14. Halla x, en:



A) 1,7 B) 1,2 C) 1,4 D) 1,5 E) 1,9

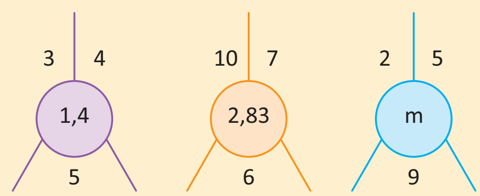
Claves

1. A
2. B
3. E
4. D
5. E
6. A
7. D
8. B
9. C
10. C
11. B
12. C
13. A
14. A

Reto

¿Cuál es el valor de m?





Rpta.: 0,78

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Halla el valor de x + y, en:

47	1	3
29		4
18	x	7

y	1	2
21		3
13	a	5

A) 34 B) 11 C) 44 D) 45 E) 54

2. Halla x, en:

10	18	30
2	6	5
5	3	x

A) 3 B) 8 C) 6 D) 9 E) 13

3. Halla x, en:

20	2	10
15	5	3
40	8	x

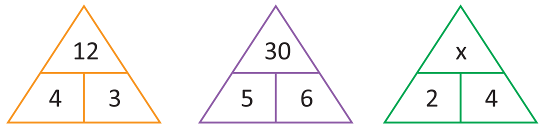
A) 4 B) 3 C) 2 D) 10 E) 5

4. Halla x, en:

16	8	2
21	3	7
x	5	2

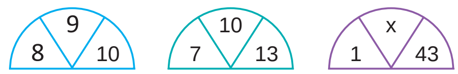
A) 9 B) 10 C) 8 D) 14 E) 15

5. Halla x, en:



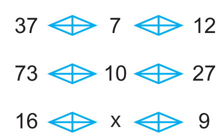
A) 7 B) 6 C) 16 D) 10 E) 8

6. Halla x, en:



A) 10 B) 20 C) 26 D) 30 E) 22

7. Halla el valor de x, en:



A) 1 B) 5 C) 8 D) 7 E) 12

8. Halla x, en:

3	8	7
3	2	2
27	64	x

A) 64 B) 36 C) 25 D) 16 E) 49

9. ¿Qué número falta?

8	1	?
2	32	8
4	2	1

A) 7 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

10. Determina el valor de "x" en el cuadro:

3	4	12	84
6	7	6	78
8	4	3	x

UNI-2005 II

A) 33 B) 36 C) 38 D) 42 E) 64

NIVEL 2

11. Halla a, en:

10	17	40
6	3	10
8	10	a

A) 20 B) 18 C) 30 D) 24 E) 25

12. Halla m, en:

9	2	3	21
6	4	2	26
7	1	8	m

A) 15 B) 16 C) 18 D) 24 E) 30

13. Halla A, en:

3	2	6	1
8	4	2	16
5	4	2	A

A) 8 B) 9 C) 11 D) 10 E) 14

14. Halla a, en:

5	4	3	27
6	1	2	14
9	4	3	a

A) 36 B) 42 C) 14 D) 39 E) 26

15. Halla a, en:

8	2	4	14
1	3	7	11
14	2	3	a

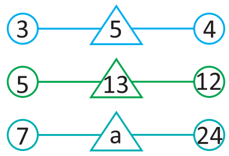
A) 18 B) 19 C) 20 D) 26 E) 27

16. Halla x, en:

2	3	4
8	0	1
7	x	0

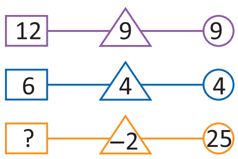
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

17. Halla el valor de a, en:



A) 17 B) 16 C) 101
D) 25 E) 38

18. Halla el término faltante, en:



A) 7 B) 5 C) 3 D) 4 E) 10

19. Determina el valor de x + y.

11	5
6	9

7	1
6	10

8	5
3	8

x	4
y	13

UNI-2005 I

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

20. Los números consignados en los tres cuadros cumplen una misma relación. Determina el valor de: x + y + z. **UNI-2003 I**

3	1	10
8	7	7

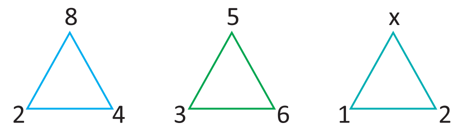
11	2	17
15	6	13

21	x	24
22	y	z

A) 20 B) 25 C) 28 D) 22 E) 18

NIVEL 3

21. Halla x, en:



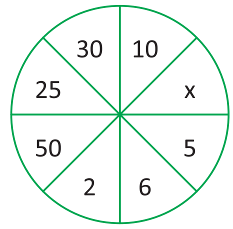
A) 4 B) 10 C) 11 D) 12 E) 0

22. ¿Qué número falta?

8	7	?
2	3	8
60	40	36

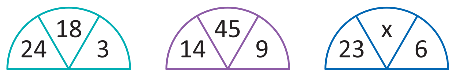
A) 7 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

23. Calcula el valor de x, en:



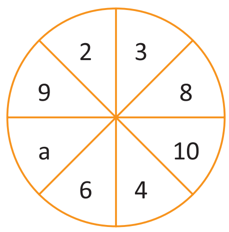
A) 12 B) 10 C) 5 D) 8 E) 9

24. Halla x, en:



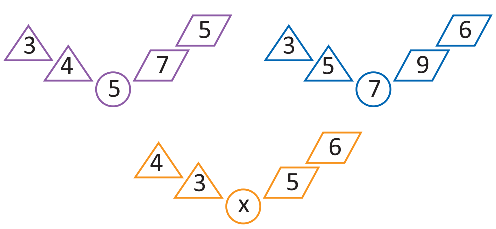
A) 10 B) 20 C) 26
D) 30 E) 36

25. Halla a, en:



A) 16 B) 15 C) 12
D) 14 E) 17

26. Halla x, en:



A) 6 B) 9 C) 3
D) 2 E) 4

27. Determina el valor de z en la tabla mostrada: (UNI-2006 II)

4	9	20
8	5	14
10	3	z

A) 15 B) 13 C) 11
D) 8 E) 9

28. Determina el valor de w.

8		9
	36	
5		12

7		2
	1	
9		3

4		3
	w	
7		10

UNI-2006 I

A) 16 B) 36 C) 49
D) 42 E) 25

Claves

NIVEL 1
1. D
2. C
3. E
4. B
5. E
6. E
7. B
8. E
9. C
10. B

NIVEL 2
11. E
12. A
13. D
14. D
15. B
16. B
17. D
18. C
19. D
20. B

NIVEL 3
21. C
22. D
23. B
24. D
25. C
26. E
27. C
28. A

Desigualdades e inecuaciones

DESIGUALDAD

Es una relación de orden que se establece entre dos números reales utilizando los siguientes símbolos:

$>$ "mayor que"
$<$ "menor que" } Estrictos

$\geq$ "mayor o igual que"
$\leq$ "menor o igual que" } No estrictos

Ejemplos:

$$7 > 3\ ;\ 4 < 9;\ -3 < 2$$

Ley de tricotomía

Dados dos números reales a y b, se cumplirá una y tan solo una de las siguientes relaciones:

$$a > b \vee a = b \vee a < b$$

Ejemplo: $\{5; 7\} \in \mathbb{R}$

$5 > 7 \vee 5 = 7 \vee 5 < 7$
F F V

Intervalo

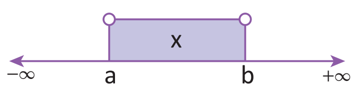
Es un conjunto de infinitos elementos que representa a todos los números reales comprendidos entre dos extremos.

A) Intervalo acotado

Si los extremos son números reales finitos:

Intervalo abierto

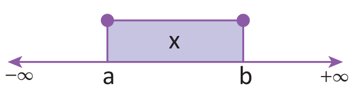
Es un intervalo en el cual no se consideran sus extremos.



$$x \in \langle a; b \rangle \iff a < x < b$$

Intervalo cerrado

Es un intervalo en el cual se considera los extremos.

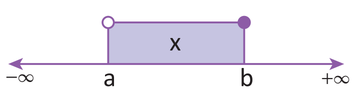


$$x \in [a; b] \iff a \leq x \leq b$$

Intervalo semiabierto o semicerrado

Uno de los extremos es abierto y el otro cerrado.

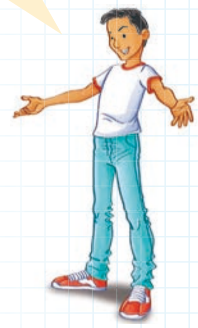
1. Intervalo semiabierto por la izquierda



$$x \in \langle a; b] \iff a < x \leq b$$

Atención

Si $x \in \langle 2; 5 \rangle$ entonces diremos que $2 < x < 5$, lo que quiere decir que x puede tomar cualquier valor real entre 2 y 5, pero no tomará los extremos.

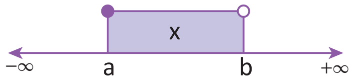




Atención

Si $x \in [2; 5]$, entonces diremos que $2 \leq x \leq 5$, quiere decir que x tomará cualquier valor entre 2 y 5, inclusive los extremos 2 y 5.

2. Intervalo semiabierto por la derecha



$x \in [a; b\rangle \iff a \leq x < b$

B) Intervalos no acotados

Se llama así cuando por lo menos uno de los extremos es el $+\infty$ o $-\infty$.



$x > a \iff x \in \langle a; +\infty\rangle$



$x \geq a \iff x \in [a; +\infty\rangle$



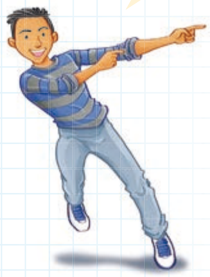
$x < b \iff x \in \langle -\infty, b\rangle$



$x \leq b \iff x \in \langle -\infty, b]$

Observación

Si:
$x \in \langle 2; 5] \iff 2 < x \leq 5$
$x \in \langle 3; 8] \iff 3 < x \leq 8$



Ejemplos:

1. Si: $\dfrac{1}{2x-1} \in [1; 8]$

   Determina el menor valor de x:

   Planteando la inecuación:

   $\dfrac{1}{1} \leq \dfrac{1}{2x+1} \leq \dfrac{8}{1} \Rightarrow \dfrac{1}{1} \geq \dfrac{2x+1}{1} \geq \dfrac{1}{8}$

   $\Rightarrow\ 1 \geq 2x+1 \leq \dfrac{1}{8} \Rightarrow 8 \geq 16x+8 \geq 1$

   $\Rightarrow\ 0 \geq x \geq -\dfrac{7}{16}$

   $\therefore$ El menor valor de x es $\dfrac{-7}{16}$.

Observación

Si:
$x \in [-1; 3\rangle \iff -1 \leq x < 3$
$x \in [-5; 2\rangle \iff -5 \leq x < 2$

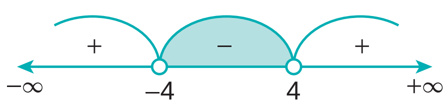


2. Halla los valores de a de tal manera que la inecuación:
   $x^2 - ax + 4 > 0$, se verifica para todo valor real de x.

   Vemos que el coeficiente principal es $1 > 0$ y para que el trinomio sea siempre positivo se debe cumplir:

   $\Delta = a^2 - 4(4) < 0$

   De donde: $a^2 - 16 < 0$
   $(a+4)(a-4) < 0$



$\therefore x \in \langle -4; 4\rangle$

Problemas resueltos

1 Resuelve:

$$(x+5)(x+3) \geq (x+2)(x+1)+3$$

Resolución:

$$(x+5)(x+3) \geq (x+2)(x+1)+3$$
$$x^2+8x+15 \geq x^2+3x+2+3$$
$$5x \geq -10$$
$$x \geq -2$$

$\therefore$ CS $= [-2; +\infty\rangle$

2 Resuelve:

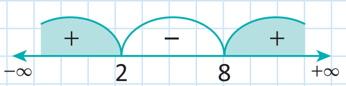
$$x^2-10x+16>0$$

Resolución:

$$x^2-10x+16>0$$

x ╲╱ −8
x ╱╲ −2

$$(x-8)(x-2)>0$$



$\therefore$ CS $= \langle -\infty; 2\rangle \cup \langle 8; +\infty\rangle$

3 Resuelve:

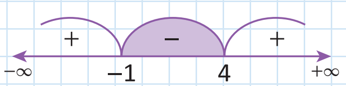
$$x^2-3x<4$$

Resolución:

$$x^2-3x-4<0$$

x ╲╱ −4
x ╱╲ +1

$$(x-4)(x+1)<0$$



$\therefore$ CS $= \langle -1; 4\rangle$

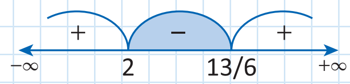
4 Resuelve:

$$1+\frac{15-7x}{x-2}>0$$

Resolución:

$$\frac{13-6x}{x-2}>0$$

$$\frac{6x-13}{x-2}<0$$



$\therefore$ CS $= \langle 2; 13/6\rangle$

5 Halla la suma de soluciones enteras de la inecuación:

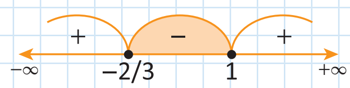
$$3x^2 \leq x+2$$

Resolución:

$$3x^2 - x - 2 \leq 0$$

3x ╲╱ +2
x ╱╲ −1

$$(3x+2)(x-1) \leq 0$$



$\therefore$ Suma de soluciones enteras $= 0 + 1 = 1$

6 Si $x \in [2; 4]$ indica el mayor valor que toma la fracción $\frac{x+3}{x+2}$.

Resolución:

$$2 \leq x \leq 4$$
$$4 \leq x+2 \leq 6$$
$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{6}+1 \leq \frac{1}{x+2}+1 \leq \frac{1}{4}+1$$
$$\frac{7}{6} \leq \frac{x+3}{x+2} \leq \frac{5}{4}$$

$\therefore$ El mayor valor será 5/4.

7 Resuelve:

$$\frac{2x-1}{5}+\frac{3x-2}{6}>\frac{2x+1}{2}+\frac{2}{3}$$

e indica el mayor de valor entero negativo.

Resolución:

$$\frac{2x-1}{5}+\frac{3x-2}{6}>\frac{2x+1}{2}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{12x-6+15x-10}{\cancel{30}\,5}>\frac{6x+3+4}{\cancel{6}}$$

$$\frac{27x-16}{5}>6x+7$$

$$27x-16>30x+35$$

$$-51>3x$$

$$-17>x$$

$$x\in\langle-\infty;-17\rangle$$

$\therefore$ El mayor valor entero negativo que puede tomar x es: -18

8 Resuelve:

$$\frac{7x-2}{2}<\frac{5x+6}{3}<\frac{9x+34}{5}$$

Resolución:

$$\frac{7x-2}{2}<\frac{5x+6}{3}\ \wedge\ \frac{5x+6}{3}<\frac{9x+34}{5}$$

$$21x-6<10x+12\ \wedge\ 25x+30<27x+102$$

$$11x<18\ \wedge\ -72<2x$$

$$x<\frac{18}{11}\ \wedge\ -36<x$$

$$\therefore\ x\in\left\langle-36;\frac{18}{11}\right\rangle$$

9 Al resolver:

$$15x^2-29x-14<0$$

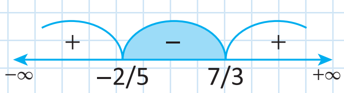
se obtiene: $CS=\langle a;b\rangle$. Halla: $a+b+\frac{1}{15}$

Resolución:

$$15x^2-29x-14<0$$

$$\begin{matrix}5x & & +2\\ 3x & & -7\end{matrix}$$

$$(5x+2)(3x-7)<0$$



Luego: $a=-\frac{2}{5};\ b=\frac{7}{3}$

$$\therefore\ a+b+\frac{1}{15}=-\frac{2}{5}+\frac{7}{3}+\frac{1}{15}=2$$

10 Resuelve:

$$(x-3)(4-x)>-x$$

Se obtiene: $CS=\langle a;b\rangle$. Halla $a+b$.

Resolución:

$$(x-3)(4-x)>-x$$

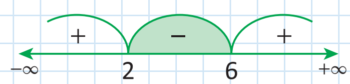
$$4x-x^2-12+3x>-x$$

$$8x-x^2-12>0$$

$$0>x^2-8x+12$$

$$\begin{matrix}x & & -6\\ x & & -2\end{matrix}$$

$$\Rightarrow 0>(x-6)(x-2)$$



Luego: $a=2;\ b=6$

$\therefore\ a+b=8$

11 Resuelve el sistema siguiente:

$$\frac{x-4}{3}\geq\frac{x+5}{2}\qquad\ldots(\alpha)$$

$$\frac{x-3}{5}\leq\frac{3-x}{4}\qquad\ldots(\beta)$$

Resolución:

I. $2x-8\geq 3x+15$

$x\leq-23$

$\Rightarrow x\in\langle-\infty;-23]$

II. $4x-12\leq 15-5x$

$9x\leq 27$

$x\leq 3$

$\Rightarrow x\in\langle-\infty;3]$

Luego la solución del sistema será:

$\langle-\infty;-23]\cap\langle-\infty;3]$

$\therefore CS=\langle-\infty;-23]$

Actividades de razonamiento

1. Resuelve:

$x^2 + 2x - 8 < 0$

A) $[-4; 2]$
B) $\langle -4; 2\rangle$
C) $\langle -\infty; -4] \cup [2; +\infty\rangle$
D) $\langle -4; 2]$
E) $\langle -\infty; -4\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$

2. Resuelve:

$x^2 - x - 6 > 0$

A) $\langle -2; 3\rangle$
B) $[-2; 3\rangle$
C) $\langle -\infty; -2\rangle \cup \langle 3; +\infty\rangle$
D) $\langle -2; 3]$
E) $\langle -\infty; -2] \cup \langle 3; +\infty\rangle$

3. Resuelve:

$3x + 4 \leq 2x + 10 < 5x + 8$

A) $[2/3; 6\rangle$
B) $\langle 2/3; 6\rangle$
C) $\varnothing$
D) $\mathbb{R}$
E) $\langle 2/3; 6]$

4. Resuelve:

$\sqrt{x+5} + \sqrt{x} < 5$

A) $[0; 4\rangle$
B) $\langle 0; 4\rangle$
C) $\langle 0; 4]$
D) $\langle -\infty; 4\rangle$
E) $\langle -\infty; 4]$

5. Resuelve:

$15 \geq x(x + 2)$

A) $[0; 2]$
B) $\langle 0; 2\rangle$
C) $\langle -3; 5\rangle$
D) $[-5; 3]$
E) $\langle -5; 3\rangle$

6. Indica la suma de las soluciones enteras de:

$\frac{x^2}{3} < x + 6$

A) 10 B) 8 C) 12 D) 9 E) 7

7. Resuelve:

$2x - 8 + \frac{6}{x-3} \leq 7 - x + \frac{6}{x-3}$

A) $\langle -\infty; 5] - \{3\}$
B) $\langle -\infty; 5]$
C) $\langle -\infty; 5\rangle$
D) $\langle -\infty; 3]$
E) $\langle -\infty; +3\rangle$

8. Indica el número de valores enteros en:

$\frac{2x-5}{x+1} - 1 \leq 0$

A) 5 B) 7 C) 6 D) 4 E) 8

9. Resuelve:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5} > x-17$$

A) $\langle -\infty; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; -60]$ C) $\langle -\infty; -60\rangle$
D) $\langle -60; +\infty\rangle$ E) $[-60; +\infty\rangle$

10. Indica el menor valor entero de:

$$\frac{5x}{11} - x < 3(x-91)$$

A) 80 B) 81 C) 76 D) 77 E) 78

11. Halla la suma de todos los valores enteros que satisfacen el sistema:

$$\frac{2}{3} < \frac{x-1}{x+3} < \frac{7}{9}$$

A) 60 B) 70 C) 80 D) 50 E) 70

12. Indica el mayor valor entero que verifica la inecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4} < \frac{x}{6}+5$$

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

13. Si $x \in [2; 5]$; indica el menor valor que toma la expresión: $\frac{x+2}{x-1}$

A) 7/4 B) 4/7 C) 7/2 D) 2/7 E) 1/4

14. Si $x \in [5; 8]$, indica el mayor valor que toma la expresión: $\frac{x-3}{x+1}$

A) 1/9 B) 2/9 C) 9/5 D) 1/3 E) 5/9

Claves

1. B	5. D	9. D	13. A
2. C	6. C	10. E	14. E
3. E	7. A	11. A	
4. A	8. B	12. A	

Reto



Si la desigualdad $\frac{a^2+a+1}{a^2+1} \leq \frac{k}{2}$, se cumple $\forall\, a \in \mathbb{R}^+$, entonces el mínimo valor que puede admitir k es:

Rpta.: 3

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Sean los intervalos:
$M = [-6; 13\rangle$; $N = \langle -8; 5]$, halla $M - N$, e indica la cantidad de números enteros que la verifica.

A) 9 B) 10 C) 7 D) 12 E) 13

2. Si $A = \langle -10; 5]$; $B = [-3; 6\rangle$. Determina: $A \cap B \cap (A \cup B)$.

A) $[-3; 5]$ B) $[-1; 2]$ C) $[2; 5]$
D) $[-2; 2]$ E) $[-1; 1]$

3. Resuelve e indica el menor valor entero que puede tomar x.

$$\frac{2x-1}{3} + \frac{x-3}{2} > 4$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

4. Si M es el conjunto solución de:

$$2x - \frac{5}{3} > \frac{x}{3} + 10$$

Determina el número de valores enteros y positivos del complemento de M, menores que 19.

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 5

5. Si $a \in \langle 1; +\infty\rangle$; resuelve en x: $ax + 3 < 3a + x$

A) $\langle 1; +\infty\rangle$ B) $\langle 3; +\infty\rangle$ C) $[1; +\infty\rangle$
D) $[3; +\infty\rangle$ E) $\langle -\infty; 3\rangle$

6. Resuelve: $-1 < \frac{4-5x}{3} \leq 7$
y determina el mayor valor entero que lo verifica.

A) –3 B) –2 C) 3 D) 2 E) 1

7. Si: $a < b$, resuelve:

$$\frac{ax+b}{2} + b < \frac{bx+a}{2} + a$$

A) $\langle -\infty; 3\rangle$ B) $\langle 3; +\infty\rangle$ C) $[3; +\infty\rangle$
D) $\langle -\infty; -3\rangle$ E) $\langle -3; 3\rangle$

8. Resuelve:

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}$$

A) $\langle -\infty; 7\rangle$ B) $\langle -\infty; 0]$ C) $\langle -1; 1\rangle$
D) $\langle -2; 7\rangle$ E) $\langle -\infty; 8]$

9. La suma de los enteros que verifican simultáneamente las inecuaciones:

$$\frac{4x-5}{7} < x + 3 \quad ; \quad \frac{3x+8}{4} > 2x - 5$$

A) –21 B) –36 C) –18 D) 18 E) 25

NIVEL 2

10. A un estudiante le dieron a vender una cierta cantidad de pollitos, de los que vendió 35 y le quedaron más de la mitad. Luego le devuelven 3, y vende después 18, con lo que le restan menos de 22 pollitos. ¿Cuántos pollitos le dieron?

A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

11. Un carpintero hizo un cierto número de mesas. Vende 49 y le quedan por vender más de la mitad. Luego hace 9 mesas y vende 20, quedándole menos de 41 mesas por vender. ¿Cuántas mesas ha hecho sabiendo que inicialmente fabricó un número par de mesas?

A) 107 B) 102 C) 100 D) 109 E) 103

12. Resuelve: $x^2 - 11x + 28 > 0$

A) $\langle -\infty; 4\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$ B) $\langle -\infty; 3\rangle$
C) $\langle 2; +\infty\rangle$ D) $\langle 7; \infty\rangle$
E) $\langle -\infty; 4\rangle$

13. Resuelve: $\frac{2}{5}(x + 4)(3x - 1) \leq 0$

A) $\left[-4; \frac{2}{3}\right]$ B) $\left\langle 4; \frac{1}{3}\right]$ C) $\langle -1; 1\rangle$
D) $\left[-4; \frac{1}{3}\right]$ E) $\left[-4; \frac{1}{3}\right\rangle$

14. Resuelve: $x^2 + x + 1 > 0$

A) $\langle -1; 1\rangle$ B) $\langle -3; 0\rangle$ C) $\mathbb{R}$
D) $\langle 0; 3\rangle$ E) $\langle -3; 1\rangle$

15. Halla el menor de los números M que cumplen la siguiente condición: $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $4x - x^2 - 12 \leq M$

A) 0 B) −2 C) −8 D) 1 E) 4

16. Siendo: $a^2 \cdot b^3 \cdot c^5$ negativo, halla el producto que siempre será negativo.

A) a^2b B) $b^2 \cdot a$ C) $b \cdot c$
D) $b^3 \cdot a^2$ E) $a^2 \cdot b^2$

17. Resuelve el siguiente sistema:

$$3x - 4 \leq 5x + 2 \leq -x + 8$$

A) $1 \leq x \leq 3$ B) $-3 \leq x \leq -1$ C) $-3 \leq x \leq 1$
D) $x \leq -3$ E) $x \leq 1$

18. Si: $-x + 3 \in [-6; 5\rangle \wedge 2x + 5 \in \langle a + 1; b + 13]$
Calcula: $a^{20} + b^2$

A) 0 B) 1 C) 10 D) 100 E) 125

NIVEL 3

19. Resuelve:

$$\frac{5x - 2}{x} - 4 < 0$$

A) $\langle 0; 4\rangle$ B) $\langle 0; 3\rangle$ C) $\langle -1; 1\rangle$
D) $\langle -2; 3\rangle$ E) $\langle 0; 2\rangle$

20. Resuelve:

$$\sqrt[4]{2x-8} > -5$$

A) $[1; +\infty\rangle$ B) $[0; +\infty\rangle$ C) $[2; +\infty\rangle$
D) $[4; +\infty\rangle$ E) $[3; +\infty\rangle$

21. Resuelve:

$$\sqrt{2x^2+x} \geq 1$$

A) $[-1; 1]$ B) $\langle -\infty; -1]$ C) $[1/2; +\infty\rangle$
D) $\langle -1; 1\rangle$ E) $\langle -\infty; -1] \cup [1/2; +\infty\rangle$

22. Resuelve:

$$\sqrt{25-x^2} < 4$$

A) $[-5; -3\rangle$ B) $\langle 3; 5]$ C) $\langle -1; 1\rangle$
D) $[-5; -3\rangle \cup \langle 3; 5]$ E) $\langle -\infty; 3]$

23. Resuelve: $\dfrac{\sqrt{4x-1}}{x} < 2$

A) $[1/4; +\infty\rangle - \{1/2\}$ B) $[1/4; +\infty\rangle$
C) $\langle -1; 1\rangle$ D) $\langle 1/4; +\infty\rangle - \{1/2\}$
E) $[1/2; +\infty\rangle$

24. Resuelve: $|2x-1| \leq \dfrac{x}{2}$

A) $\left\langle \dfrac{2}{3}; 5\right]$ B) $\left\langle \dfrac{1}{2}; 2\right]$ C) $\langle 1; 4]$
D) $\langle -1; 3]$ E) $\left[\dfrac{2}{5}; \dfrac{2}{3}\right]$

25. Si: $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c < 0 \wedge a < b$, entonces se cumple:

A) $\dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$ B) $\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$ C) $ca < cb$
D) $a + b + c < 0$ E) $c + a > c + b$

26. Sabiendo que: $x \in \langle 1; 2\rangle$, reduce:

$A = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-2x+1}$

A) $2x-3$ B) 1 C) -1
D) $-2x+3$ E) $-2x$

27. De todos los triángulos, cuyos dos de sus lados miden 2 cm y 4 cm, halla los que tienen la propiedad de que su tercer lado tiene por longitud un número entero y señala a qué es igual la suma de los perímetros de los triángulos hallados.

A) 28 cm B) 30 cm C) 24 cm
D) 26 cm E) 25 cm

Claves

NIVEL 1			
1. C	8. A	15. C	22. D
2. A	9. A	16. C	23. A
3. E	NIVEL 2	17. B	24. E
4. B	10. E	18. D	25. B
5. E	11. C	NIVEL 3	26. B
6. E	12. D	19. E	27. B
7. B	13. D	20. D	
	14. C	21. E	

Logaritmos

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número real y positivo N, en la base b ($b > 0$ y $b \neq 1$), es el exponente x al cual hay que elevar la base, para obtener el número N.

$$\log_b N = x \iff b^x = N$$

Donde:
N: número real y positivo
b: base del logaritmo
x: logaritmo de N en base b

Ejemplos:

$\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4 \iff 3^4 = 81$

$\log_2 1024 = 10 \iff 2^{10} = 1024$



Nota

$\log_b 1 = 0$
$\log_b b = 1$

Identidad fundamental

$$b^{\log_b N} = N \text{; donde } N > 0;\ b > 0 \text{ y } b \neq 1$$

Ejemplos:

$7^{\log_7 5} = 5$

$11^{\log_{11} 3} = 3$

$\sqrt{2}^{\log_{\sqrt{2}} 8} = 8$



Atención

En general:
Si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son números reales positivos y $b > 0$, $b \neq 1$, se cumple:

$\log_b(A_1 . A_2 . A_3 \ldots a_n)$
$= \log_b A_1 + \log_b A_2 + \ldots + \log_b A_n$

PROPIEDADES SOBRE LOGARITMOS

Sean A, B y C números positivos y $b > 0$, $b \neq 1$.

1.

$$\log_b AB = \log_b A + \log_b B$$

Ejemplos:
- $\log_2 18 = \log_2 9 + \log_2 2$
- $\log_3 6 + \log_3 3 + \log_3 2 = \log_3 36$

2.

$$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

Ejemplos:
- $\log_3\left(\frac{8}{5}\right) = \log_3 8 - \log_3 5$
- $\log_2 7 = \log_2 21 - \log_2 3$

3.

$$\log_b A^n = n\log_b A$$

Ejemplos:
- $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3\log_3 3 = 3$
- $\log_2 2048 = \log_2 2^{11} = 11\log_2 2 = 11$

4.

$$\log_{b^n} A^m = \frac{m}{n}\log_b A$$

Ejemplos:
- $\log_{2^8} 2^9 = \frac{9}{8}\log_2 2 = \frac{9}{8}$
- $\log_4 128 = \log_{2^2} 2^7 = \frac{7}{2}\log_2 2 = \frac{7}{2}$

Nota

Si $b, N \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$; entonces:

$\log_b\left(\frac{1}{N}\right) = \log_b 1 - \log_b N$

$\log_b\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_b N$

5. Cambio de base

$$\log_B A = \frac{\log_C A}{\log_C B}$$

Ejemplos:

$$\log_5 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 5}$$

$$\log_3 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 3}$$

6. Regla de la cadena

$$\log_A B \,.\, \log_B C \,.\, \log_C D \,.\, \log_D E = \log_A E$$

Ejemplos:

- $\log_3 8 \,.\, \log_8 5 \,.\, \log_5 81 = \log_3 81 = 4$
- $\log_5 3 \,.\, \log_9 5 \,.\, \log_6 9 \,.\, \log_{27} 6$

$$= \log_{27} 3 = \frac{1}{3}$$

Recuerda

$\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n}\log_b A$



FUNCIONES DERIVADAS DEL LOGARITMO

Cologaritmo (colog)

Se define como el opuesto aditivo del logaritmo, se cumple:

$$\text{colog}_b N = -\log_b N$$

Ejemplo:

$\text{colog}_5(125) = -\log_5 125 = -3$

Antilogaritmo (antilog)

Se define como la función que transforma el logaritmo en una potencia, se cumple:

$$\text{antilog}_b N = b^N$$

Ejemplo:

$\text{antilog}_2(\log 28) = 2^{\log_2 8} = 8$

Veamos algunas aplicaciones:

1. Halla el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{\sqrt{5}^{\log 7} + \sqrt{7}^{\log 5}}{2} \leq \sqrt{x}$$

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{\sqrt{5}^{\log 7} + \sqrt{7}^{\log 5}}{2} \leq \sqrt{x} \qquad ...(1)$$

Se tiene:

$$\sqrt{7}^{\log 5} = 7^{\frac{1}{2}\log 5} = 7^{\log\sqrt{5}} = \sqrt{5}^{\log 7}$$

Reemplazando en (1):

$$\frac{\sqrt{5}^{\log 7} + \sqrt{5}^{\log 7}}{2} \leq \sqrt{x};\ \ x \geq 0$$

$$\frac{2(\sqrt{5}^{\log 7})}{2} \leq \sqrt{x}$$

$$\sqrt{5}^{\log 7} \leq \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 5^{\log 7} \leq x$$

Luego:

$$CS = [5^{\log 7}; +\infty\rangle$$

2. Halla las raíces de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{\log x} \geq \log\sqrt{x}$$

Resolución:

Se tiene el conjunto universo: $\langle 0; +\infty\rangle$

Entonces:

$\sqrt{\log x} \geq \log\sqrt{x} \iff$

$\log x \geq 0 \wedge \log\sqrt{x} \geq 0 \wedge \log x \geq (\log\sqrt{x})^2$

Se tiene: $x \geq 1$

También:

$4\log x \geq (\log x)^2$

$0 \geq \log x(\log x - 4)$

Se cumple:

$0 \leq \log x \leq 4$

$\Rightarrow 1 \leq x \leq 10^4$

Luego:

$CS = \langle 0; +\infty\rangle \cap [1; +\infty\rangle \cap [1; 10^4]$

$\therefore CS = [1; 10^4]$

Observación

$\log_b A = \log_{b^n} A^n$

$= \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{A}$



Atención

$\log_B A = \frac{1}{\log_A B}$

Nota

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Problemas resueltos

1 Calcula:

$$M = \frac{\log_{125} 5 + \log_{64} 16}{\log_{32} 4 + \log_{243} 27}$$

Resolución:

$$M = \frac{\log_{5^3} 5^1 + \log_{4^3} 4^2}{\log_{2^5} 2^2 + \log_{3^5} 3^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\log_5 5 + \frac{2}{3}\log_4 4}{\frac{2}{5}\log_2 2 + \frac{3}{5}\log_3 3}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{5}}$$

$\therefore\ M = 1$

2 Halla:

$$N = \log_8 2 + \log_{25} 5 - \log_{64} 32$$

Resolución:

$$N = \log_{2^3} 2^1 + \log_{5^2} 5^1 - \log_{2^6} 2^5$$

$$N = \frac{1}{3}\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_5 5 - \frac{5}{6}\log_2 2$$

$$N = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$$

$\therefore\ N = 0$

3 Resuelve:

$$\frac{\log(\log_x \sqrt[3]{x})}{\text{colog}(\text{antilog}\, x)} = \text{colog} \sqrt[x]{x}$$

Resolución:

$$\frac{\log 1/3}{\text{colog}\, 10^x} = -\log \sqrt[x]{x}$$

$$\frac{\log 1/3}{-\log 10^x} = -\log \sqrt[x]{x}$$

$$\frac{\log 1/3}{-x} = -\log \sqrt[x]{x}$$

$$\log 1/3 = x \log \sqrt[x]{x}$$

$$\log 1/3 = x \,.\, \frac{1}{x} \,.\, \log x$$

$$\log 1/3 = \log x$$

$\therefore\ x = \frac{1}{3}$

4 Halla:

$$E = 2\log_{12} 6 + \frac{1}{3}\log_{12} 64$$

Resolución:

$$E = \log_{12} 6^2 + \log_{12} 64^{1/3}$$

$$E = \log_{12} 36 + \log_{12} 4$$

$$E = \log_{12} 144$$

$\therefore\ E = 2$

5 Resuelve:

$$2\log x = \log(2x - 3) + \log 3$$

Resolución:

$$\log x^2 = \log(6x - 9)$$

$$x^2 = 6x - 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3)^2 = 0$$

$\therefore\ x = 3$

6 Resuelve:

$$\log[\log(\log x)] = 0$$

Resolución:

$$[\log(\log x)] = 10^0$$

$$[\log(\log x)] = 1$$

$$\log x = 10^1$$

$$\log x = 10$$

$$x = 10^{10}$$

7 Halla n, si:

$$\log_3(5n-1)+\text{colog}_3(3n-5)=2$$

Resolución:

$$\log_3\left(\frac{5n-1}{3n-5}\right)=2$$

$$\frac{5n-1}{3n-5}=3^2$$

$$\frac{5n-1}{3n-5}=9$$

$$5n-1=27n-45$$

$$44=22n$$

$$n=2$$

8 Resuelve:

$$2\log(2x+2)-2=\log\left(1+\frac{12x}{25}\right)$$

Resolución:

$$\log(2x+2)^2-\log100=\log\left(\frac{25+12x}{25}\right)$$

$$\log\left(\frac{4x^2+8x+4}{100}\right)=\log\left(\frac{25+12x}{25}\right)$$

$$\frac{\cancel{4}(x^2+2x+1)}{\cancel{100}\,25}=\frac{25+12x}{\cancel{25}}$$

$$x^2+2x+1=25+12x$$

$$x^2-10x-24=0$$

x ⟍⟋ −12
x ⟋⟍ +2

$\therefore\ CS=\{-2;\,12\}$

9 Resuelve:

$$1000^{\log3}=3^{x^2-5x+9}$$

e indica el producto de soluciones.

Resolución:

$$\log3\,.\,\log1000=(x^2-5x+9)\log3$$

$$\log3\,.\,3=(x^2-5x+9)\log3$$

$$(x^2-5x+9-3)\log3=0$$

$$x^2-5x+6=0$$

x ⟍⟋ −3
x ⟋⟍ −2

$$(x-3)(x-2)=0$$

$\therefore$ Producto de soluciones $=3\times2=6$

10 Si se cumple que:

$$\log\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)=\log p+\log q$$

Calcula $\log_q p+\log_p q+20$.

Resolución:

$$\log\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)=\log pq$$

$$\frac{p^2+q^2}{2}=pq$$

$$p^2+q^2=2pq$$

$$p^2-2pq+q^2=0$$

$$(p-q)^2=0\ \Rightarrow\ p=q$$

Luego: $\log_q p+\log_p q+20$

$$=1+1+20=22$$

11 Halla las raíces de la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\log x}=\log\sqrt{x}$$

Resolución:

$$\left(\sqrt{\log x}\right)^2=\left(\log\sqrt{x}\right)^2$$

$$\log x=\left(\frac{1}{2}\log x\right)^2$$

$$\log x=\frac{1}{4}\log^2x$$

$$4\log x=\log^2x$$

$$\log x(\log x-4)=0$$

$$\Rightarrow\ \log x=0\ \vee\ \log x-4=0$$

$$x=10^0\ \vee\ \log x=4$$

$$x=1\ \vee\ x=10^4$$

$$\therefore\ x\in\{1;\,10^4\}$$

Actividades de razonamiento

1. Halla:

$$E = \frac{\log_7 343 + \log_{1/6} 6}{\log_8 64 + \log_{1/5} 625}$$

A) –1 B) 2 C) 4 D) 1 E) 8

2. Resuelve:
$\log_{x+1}(5x + 19) = 2$

A) 2 B) 6 C) –3 D) 19 E) 5

3. Calcula:
$E = -\text{Colog}_4\{\text{Antilog}_2[\log_2 16]\}$

A) 1 B) 4 C) 8 D) 10 E) 2

4. Calcula:
$S = \sqrt[3]{\text{colog}_5 0,04 + \text{antilog}_5 2}$

A) 2 B) 5 C) 8 D) 3 E) 1

5. Halla x:
$\log_a 64 \,.\, \log_x a = \log_b c \,.\, \log_x b \,.\, \log_c x^6$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

6. Halla x:
$\log_{4x} 9x \,.\, \log_{5x} 4x \,.\, \log_3 5x = \log_{2x} 8x^3$

A) 3 B) 9 C) 1/3 D) 6 E) $\sqrt{3}$

7. Halla n si:
$\log_3 n^2 + \text{colog}_3 n = 3$

A) 3 B) 1 C) 9 D) 6 E) 27

8. Halla x en:
$2\log x = \log 192 + \log 0,75$

A) 8 B) 12 C) 16 D) 20 E) 18

9. Calcula x:
$\log x = m - \log n$

A) $10^m/n$ B) $10^n/m$ C) 10^m
D) 10^n E) 1

10. Si: $\log_5 2 = a \wedge \log_5 3 = b$. Halla: $\log_5 \sqrt{300}$

A) $a - b/2 + 1$ B) $a - b/2 - 1$ C) 1
D) $a + b/2 + 1$ E) $a + b/2 - 1$

11. Halla la suma de las raíces de:
$\log_4(2x^2 + 15x + 26) = 3$

A) 15/2 B) 7/2 C) −15/2 D) 9/2 E) 13/2

12. Dada la ecuación:
$1 + 2\log x = \log(x + 2)$
Halla la suma de soluciones.

A) 1 B) 1/10 C) 10
D) 1/100 E) 100

13. Calcula x en:
$\text{antilog}_x(\text{antilog}_{\sqrt[4]{2}}(\text{antilog}_2 3)) = 625$

A) 25 B) $\sqrt[4]{25}$ C) $\sqrt{125}$
D) $\sqrt{5}$ E) 5

14. Reduce:
$\text{colog}_4(\log_2(\log_2^2(\text{antilog}_4(\log_{1,4}1,96))))$

A) 1 B) 4 C) 2 D) −1 E) 1/2

Claves

1. A 2. B 3. E 4. D
5. B 6. A 7. E 8. B
9. A 10. D 11. C 12. B
13. E 14. D

Reto



Si:
$\log(6!) = a$
$\log(4!) = b$
Calcula $\log_3 100$ en función de a y b.

Rpta.: $\dfrac{2}{a - b - 1}$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1) Halla el valor de x:

$$\log_x 81 = 4$$

A) 1 B) 4 C) 6 D) 7 E) 3

2) Halla el valor de x:

$$\log_8 x = \frac{2}{3}$$

A) 4 B) 5 C) 2 D) 1 E) 3

3) Halla el valor de x:

$$\log_{27} 9 = x$$

A) 1/2 B) 2/3 C) 3 D) 3/2 E) 2

4) Halla el valor de x:

$$\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{2}$$

A) 3 B) 4 C) 1 D) 2 E) 5

5) Halla x en:

$$\log x = \log 32 - \log 16 + 2\log 2$$

A) 6 B) 7 C) 2 D) 5 E) 8

6) Halla el valor de A si:

$$A = \log_2 20 - \log_2 5 + \log_2 8$$

A) 3 B) 6 C) 8 D) 4 E) 5

7) Resuelve x en:

$$\log_4 2 + \log_4 (3x + 2) = 3$$

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 7

8) Resuelve x en:

$$\log_7 (8x + 7) = 3$$

A) 45 B) 38 C) 36 D) 42 E) 40

9) Halla x en:

$$\log_{(2x + 3)} 81 = 2$$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 2

NIVEL 2

10) Halla x en:

$$\log(3x - 5) + \log 6 = \log 8x$$

A) 5 B) 2 C) 6 D) 8 E) 3

11. Resuelve:

$$\log(x+3)-\log(x-6)=1$$

A) 6 B) 7 C) 9 D) 5 E) 8

12. Resuelve:

$$3\log x-\log 32=\log(x/2)$$

A) {–4; 4} B) –4 C) {–2; 2}
D) {–4; 0; 4} E) 4

13. Resuelve:

$$\log_5 3=\log_5(x^2+2x)$$

A) 1 B) 3 C) 2
D) –3 E) {1; –3}

14. Determina el valor de E si:

$$E=\left(\sqrt{5}\right)^{2\log_5 x}$$

A) x B) 3 C) 2 D) x/2 E) 4

15. Determina el valor de E si:

$$E=\text{antilog}_2\left(\log_2 \sqrt{5}^{\,6}\right)$$

A) 81 B) 25 C) 64 D) 125 E) 32

16. Halla x en:

$$\frac{\log(35-x^3)}{\log(5-x)}=3$$

A) {3; 2} B) 6 C) {–1; 6}
D) 3 E) –1

17. Resuelve:

$$\log_2(5x-2)+\text{colog}_2(3x-5)=1$$

A) 10 B) 8 C) 7 D) 5 E) 6

18. Halla x en:

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=2$$

A) 5 B) 3 C) –2
D) {–1; 1} E) {–2; 3}

19. Halla el valor de E si:

$$E=2^{2+\log_2 3}+3^{2+\log_3 4}$$

A) 48 B) 40 C) 35 D) 42 E) 38

NIVEL 3

20. Calcula el valor de A:

$$A=\frac{1+\log_2 3}{1-\log_2 3}+\frac{1+\log_3 2}{1-\log_3 2}$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 0 E) 3

21 Calcula el valor de E:

$$E = \log_{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}^{\sqrt{3}}\right) - 3^{\log_4 2}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 0 E) 1

22 Halla el valor de n.

$$\log_2 4 + \log_2 4^2 + ... + \log_2 4^n = \log_2 4^6$$

A) 3 B) 6 C) 7
D) 2 E) 5

23 Resuelve:

$$\log_4[\log_3(\log_2 x)] = 0$$

A) 6 B) 9 C) 10
D)7 E) 8

24 Si: $\log x^{\log x} + \log x - 6 = 0$
Halla el producto de las dos soluciones:

A) 0 B) 0,1 C) 100 D) 1 E) 10

25 Resuelve:

$$\frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}} = 3$$

A) 2 B) log2 C) log4
D) $\frac{1}{2}$log2 E) 1

26 Calcula:

$$E = \text{colog}_6\text{antilog}_8(\log_2 3 + 1)$$

A) –1 B) –3 C) 3 D) 2 E) –2

27 Resuelve:

$$\frac{1}{\log_{(x-2)} 7} + \frac{1}{\log_{(x+1)} 7} = \log_7 4$$

A) 2 B) 1 C) {–2; 3}
D) 3 E) 4

28 Si: $m; n \in \mathbb{R}^+ \wedge \log_{m.n} m = 3$, calcula el valor de E:

$$E = \log_{m.n} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt[3]{m^7}}$$

A) –1 B) –10 C) 4
D) 0 E) 2

Claves

NIVEL 1	8. D	15. D	22. A
1. E	9. A	16. A	23. E
2. A	**NIVEL 2**	17. B	24. B
3. B	10. E	18. B	25. D
4. D	11. B	19. A	26. B
5. E	12. E	**NIVEL 3**	27. D
6. E	13. E	20. D	28. B
7. C	14. A	21. D	

Cerillos

Los juegos con cerillos constituyen un conjunto de actividades que desarrollan la imaginación espacial además de desarrollar la atención y la concentración. Los cerillos se convierten en un medio para entretenernos usando nuestra imaginación.

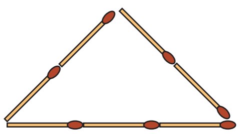
Las actividades desarrolladas y propuestas consisten en solucionar problemas a través de desplazar o quitar fósforos para obtener o desarmar figuras que conllevan a la construcción de conceptos geométricos, así como también para resolver operaciones aritméticas.

Observación

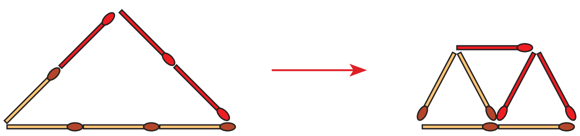
Los problemas de cerillos son juegos de tipo perceptivo espacial y en su realización se desarrollan procesos de análisis y de síntesis.

FÓSFOROS QUE SE TRASLADAN O DESPLAZAN

Veamos la siguiente aplicación:
Transforma el siguiente triángulo en otros tres unidos entre sí utilizando para ello el mismo número de cerillos.



Resolución:
Los cerillos rojos son los que vamos a mover y son cuatro, entonces queda la siguiente figura:



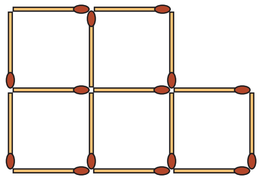
Nota

Ten en cuenta que no deben quedar cerillos sueltos.

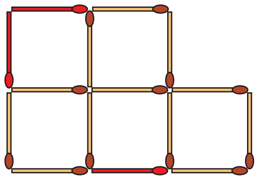
FÓSFOROS QUE SE QUITAN O AGREGAN

Veamos las siguientes aplicaciones:

1. Quita tres palitos de modo que queden 3 cuadrados iguales.



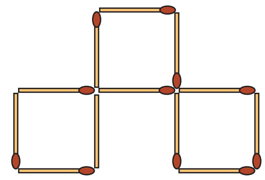
Resolución:



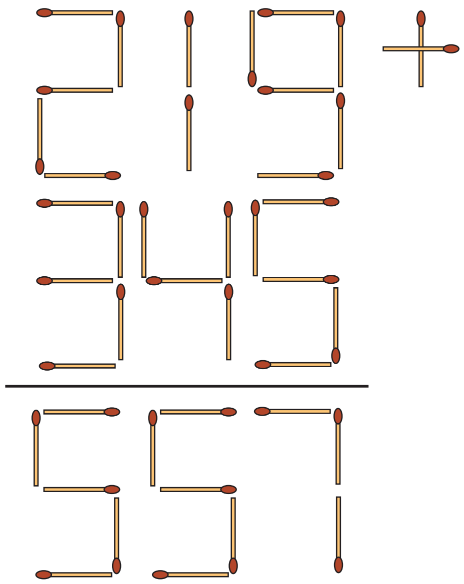
Nota

A los cerillos también se les llaman palitos de fósforo.

Los palitos de fósforo rojo son los que vamos a mover, para que queden tres cuadrados iguales.

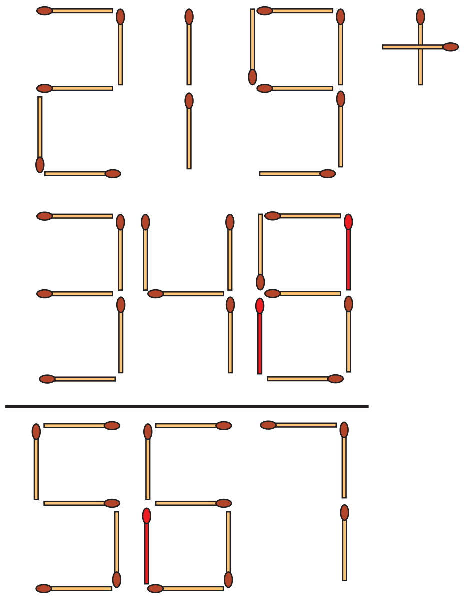


2. Agrega tres palitos para hacer correcta la suma.



Resolución:

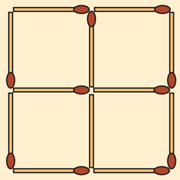
Los palitos con rojo son los que vamos a agregar para que la igualdad sea correcta.



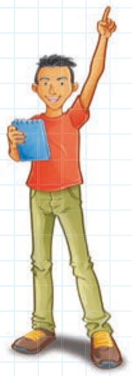
Atención

Cuando te dicen que una figura se encuentra formada por cuadrados, y no especifican que son iguales, no te olvides de contar también los cuadrados formados por otros cuadrados más pequeños.

Ejemplo:

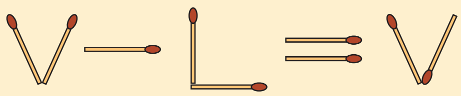


La figura está formada por 5 cuadrados: 4 pequeños y 1 que contiene a los otros 4.



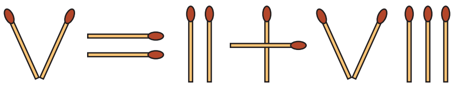
Efectuar

¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para que la igualdad mostrada sea correcta?



Problemas resueltos

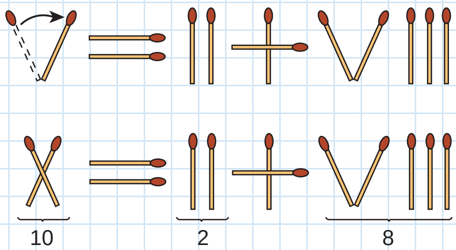
1 ¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para que la igualdad sea correcta?



Resolución:

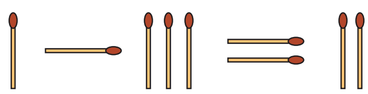
Según el gráfico se tiene: 5 = 2 + 8, lo cual es incorrecto.

Se debe mover un palito de la siguiente manera:



∴ Se debe mover 1 palito.

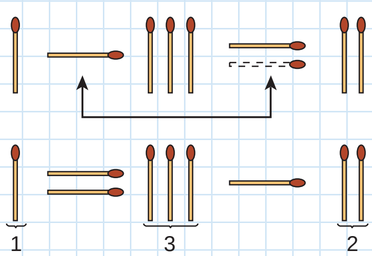
2 ¿Cuál es el menor número de palitos que se debe cambiar de lugar para que se cumpla la igualdad?



Resolución:

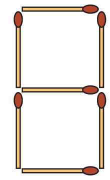
Observamos que: 1 – 3 = 2, lo cual es incorrecto.

Se debe cambiar un palito de la siguiente manera:



∴ Se debe cambiar de lugar 1 palito.

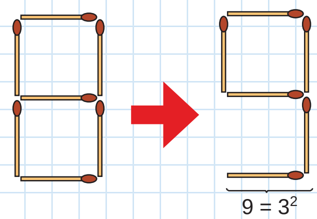
3 ¿Cuántos cerillos como mínimo, se deben mover en el gráfico para obtener un cuadrado?



Resolución:

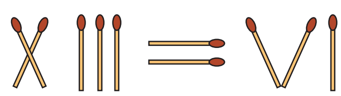
Con la cantidad de cerillos que se muestra vemos que va a ser imposible formar un cuadrado, entonces pensamos como cuadrado aquel número que tiene raíz cuadrada exacta: $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; $16 = 4^2$; ...

Como piden el mínimo se tiene:



∴ Se debe retirar 1 palito.

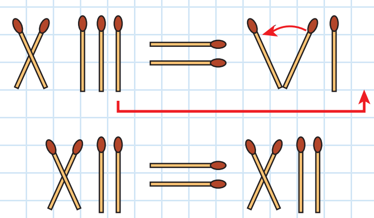
4 ¿Cuántos palitos, como mínimo debemos cambiar de posición para generar una verdadera igualdad?



Resolución:

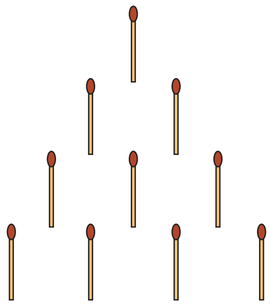
Del gráfico se tiene: 13 = 6, lo cual es incorrecto.

Los cambios son de la siguiente manera:



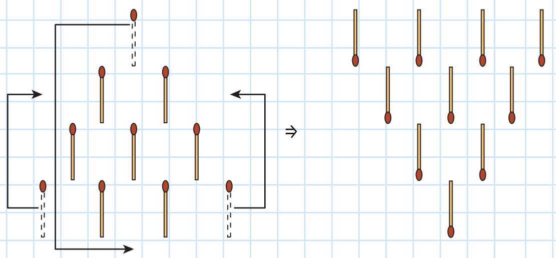
∴ Se deben cambiar de lugar 2 palitos.

5 ¿Cuántos palitos se deben mover como mínimo para que la figura triangular (△) cambie de posición a (▽)?



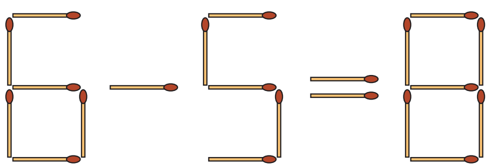
Resolución:

Los palitos se deben mover de la siguiente manera:



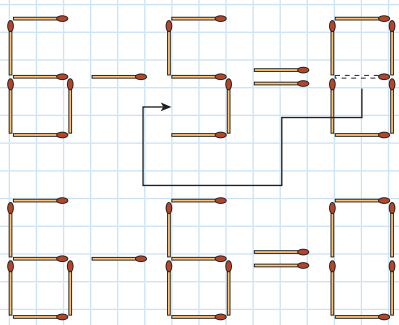
∴ Se deben mover como mínimo 3 palitos.

6 ¿Cuántos palitos como mínimo se deben cambiar de posición para que la operación sea correcta?



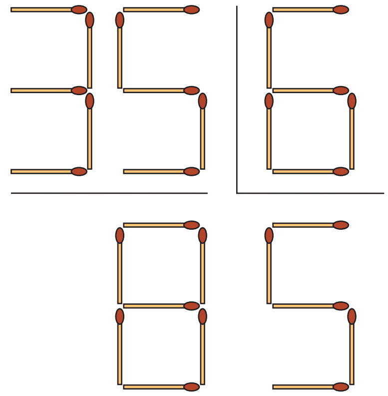
Resolución:

Del gráfico se tiene: 6 − 5 = 8, lo cual es incorrecto.
Se hace el siguiente cambio:



∴ Se debe cambiar de posición 1 palito.

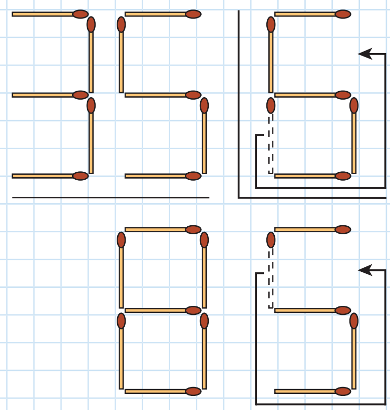
7 ¿Cuántos palitos, como mínimo, se deben mover para que la operación sea correcta?



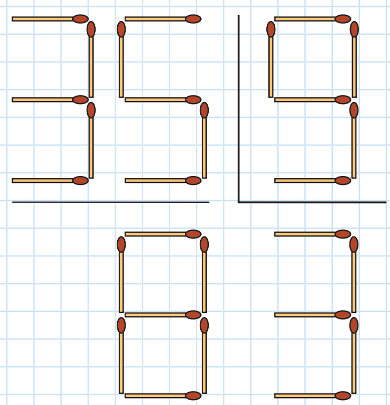
Resolución:

Del gráfico se tiene: $\begin{array}{r|l} 35 & 6 \\ \hline 8 & 5 \end{array}$ lo cual es incorrecto.

Los movimientos son los siguientes:

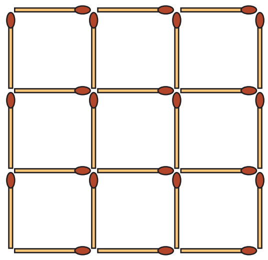


Luego quedará de la siguiente manera:



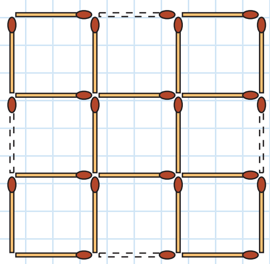
∴ Se deben mover 2 palitos.

8 ¿Cuántos palitos se deben retirar, como mínimo, para obtener una figura formada por 5 cuadrados iguales? (Sin dejar cabos sueltos).

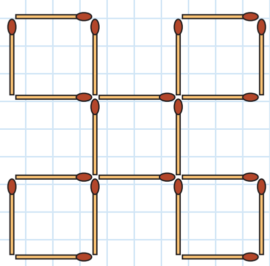


Resolución:

Los palitos a retirar son los que se encuentran con líneas punteadas.

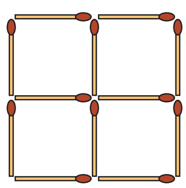


Luego quedará de la siguiente manera:



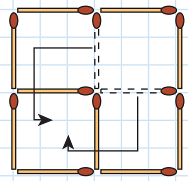
∴ Se deben retirar 4 palitos.

9 ¿Cuántos palitos hay que mover, como mínimo, para obtener una figura formada por 6 cuadrados? (Sin dejar cabos sueltos).

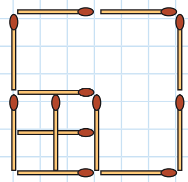


Resolución:

En ningún momento nos dicen que los cuadrados deben ser iguales, entonces realizamos los siguientes movimientos:

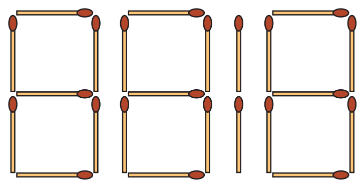


Luego, la figura quedará de la siguiente manera.



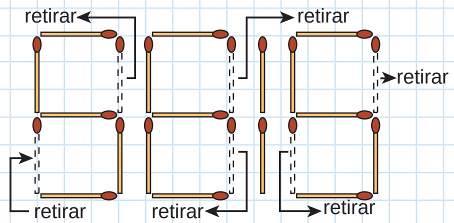
∴ Se deben mover 2 palitos.

10 ¿Cuántos palitos debemos retirar como mínimo para dejar 6 en la figura?

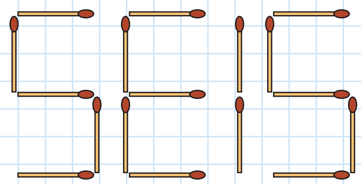


Resolución:

Retiramos los palitos siguientes:



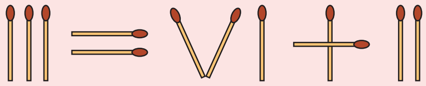
Finalmente se obtiene:



∴ Se deben retirar 6 palitos.

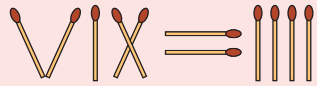
Actividades de razonamiento

1. ¿Cuál es la menor cantidad de palitos que se deben mover para obtener una verdadera igualdad?



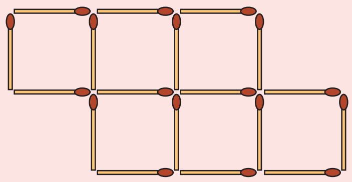
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. ¿Cuántos palitos, como mínimo, se tienen que mover para logar una verdadera igualdad?



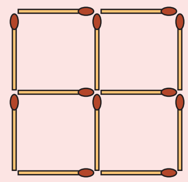
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

3. ¿Cuántos palitos se deben retirar como mínimo para que queden cuatro cuadrados iguales?



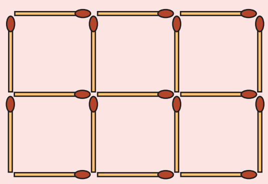
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

4. ¿Cuántos palitos se deben mover como mínimo para obtener 3 cuadrados iguales?



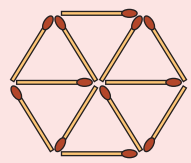
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. ¿Cuántos palitos hay que retirar como mínimo para obtener 3 cuadrados iguales?



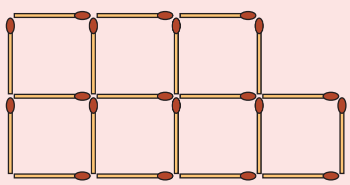
A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 1

6. ¿Cuantos palitos hay que retirar como mínimo para que no quede ningún triángulo?



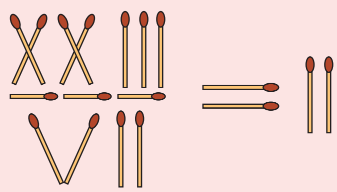
A) 5 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

7. ¿Cuántos palitos se deben retirar como mínimo de la figura para que queden exactamente 4 cuadrados del mismo tamaño?



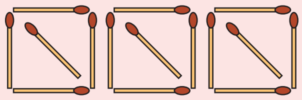
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

8. ¿Cuántos palitos hay que mover como mínimo para tener una verdadera igualdad aproximada? (no está permitido romper o doblar palitos).



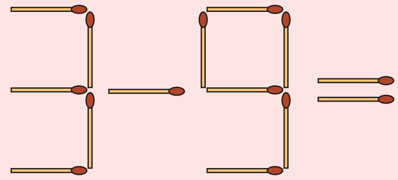
A) 3 B) 1 C) 2 D) 4 E) 5

9. ¿Cuántos palitos se deben retirar como mínimo para dejar solo uno?



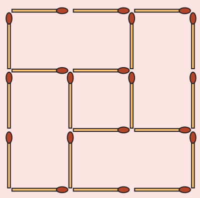
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

10. ¿Cuántos palitos se deben cambiar de lugar como mínimo para obtener una verdadera igualdad?



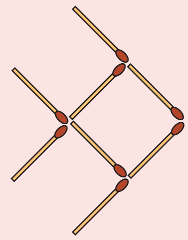
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

11. La figura que se muestra ha sido construida con palitos de fósforo. ¿Cuál es la mínima cantidad de palitos que se deben cambiar de lugar para obtener 5 cuadrados iguales?



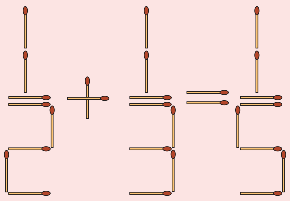
A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

12. ¿Cuántos palitos, como mínimo, se deben cambiar de lugar para hacer que el pececito que se muestra nade hacia la izquierda?



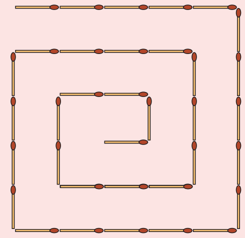
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

13. La operación que se muestra es obviamente falsa como se puede observar. ¿Cuántos palitos como mínimo se deben cambiar de lugar para obtener una igualdad correcta?



A) 5 B) 4 C) 3 D) 1 E) 2

14. ¿Cuántos cerillos se deben, cambiar de lugar, como mínimo, para obtener 3 cuadrados de distintos tamaños?



A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

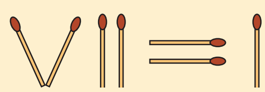
Claves

1. A	5. C	9. D	13. D
2. E	6. D	10. D	14. D
3. B	7. A	11. B	
4. C	8. B	12. C	

Reto



¿Cuántos cerillos como mínimo se deben cambiar de lugar para obtener una verdadera igualdad?

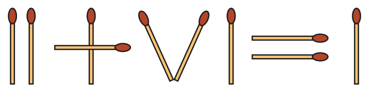


Rpta.: 1

Refuerza practicando

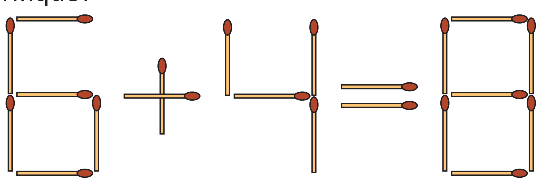
NIVEL 1

1. ¿Cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, para que la igualdad que se muestra en el gráfico sea correcta?



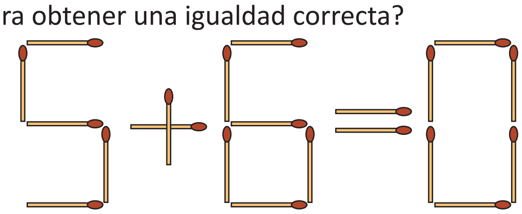
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. ¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, en el siguiente gráfico para que la igualdad se verifique?



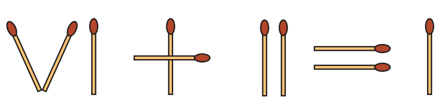
A) 5 B) 4 C) 2 D) 1 E) 3

3. ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para obtener una igualdad correcta?



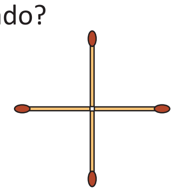
A) 2 B) 3 C) 5 D) 1 E) 4

4. ¿Cuántos palitos hay que mover, como mínimo, para formar una expresión matemática correcta?



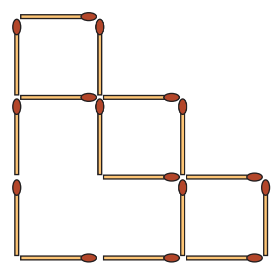
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

5. ¿Cuántos cerillos como mínimo debes mover para formar un cuadrado?



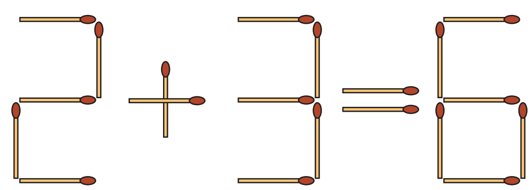
A) 4 B) 3 C) 2 D) 5 E) 1

6. ¿Cuántos palitos como mínimo debes mover para formar 5 cuadrados del mismo tamaño?



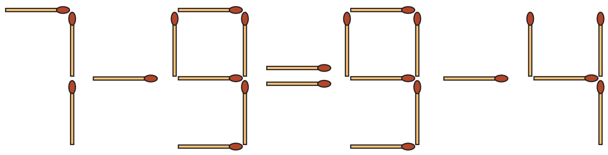
A) 2 B) 1 C) 3 D) 5 E) 4

7. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad sea correcta?



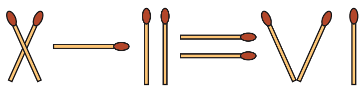
A) 3 B) 4 C) 5 D) 2 E) 1

8. En la igualdad mostrada, ¿cuántos cerillos se moverán, como mínimo, para que se verifique?



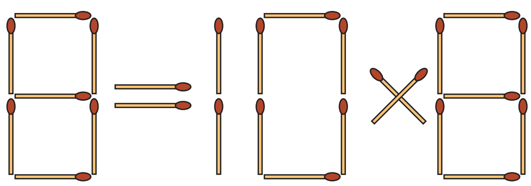
A) 2 B) 4 C) 5 D) 1 E) 3

9. ¿Cuántos cerillos, como mínimo, se tienen que mover para que se obtenga una igualdad?



A) 5 B) 1 C) 3 D) 4 E) 2

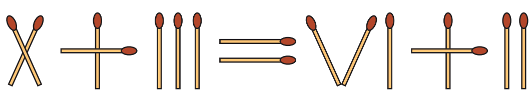
10. En la igualdad mostrada, ¿cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que sea correcta?



A) 5 B) 4 C) 2 D) 1 E) 3

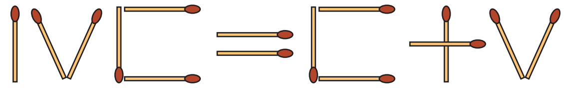
NIVEL 2

11. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que se verifique la siguiente igualdad?



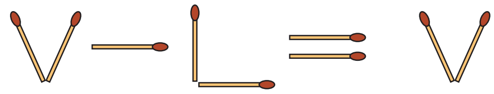
A) 4 B) 2 C) 3 D) 5 E) 1

12. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad sea correcta?



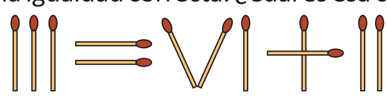
A) 3 B) 4 C) 5 D) 7 E) 6

13. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la igualdad mostrada sea correcta?



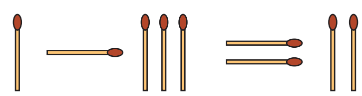
A) 5 B) 3 C) 1 D) 4 E) 2

14. Moviendo la menor cantidad de palitos debemos formar una igualdad correcta. ¿Cuál es esa cantidad?



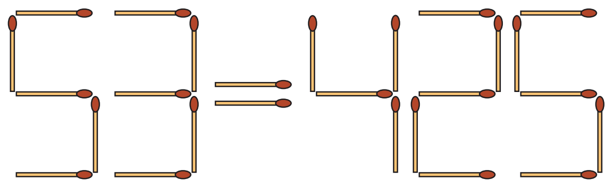
A) 2 B) 4 C) 5 D) 1 E) 3

15. ¿Cuál es el menor número de cerillos que se deben cambiar de lugar para obtener una igualdad correcta?



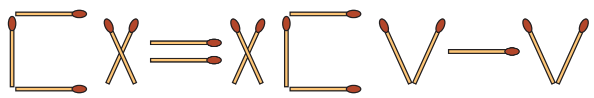
A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

16. En la igualdad que se muestra, para que se verifique se tienen que mover x cerillos como mínimo. Halla el valor de x.



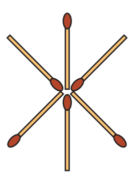
A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5

17. ¿Cuántos cerillos se debe mover, como mínimo, para que se verifique la siguiente igualdad?



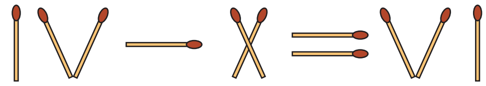
A) 1 B) 4 C) 2 D) 5 E) 3

18. En el siguiente gráfico, ¿cuántos cerillos se tienen que mover como mínimo, para obtener una corbata michi?



A) 3 B) 5 C) 1 D) 2 E) 4

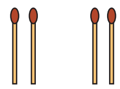
19. ¿Cuántos cerillos se deben mover como mínimo para que la igualdad sea correcta?



A) 5 B) 1 C) 3 D) 4 E) 2

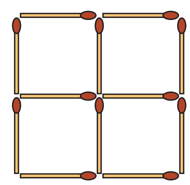
NIVEL 3

20. ¿Cuántos palitos debes agregar a la siguiente figura para obtener cien?



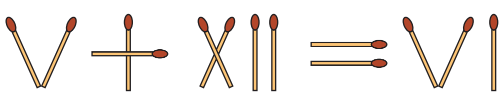
A) 2 B) 4 C) 1 D) 5 E) 3

21. ¿Cuántos palitos se deben quitar como mínimo, para que solo haya 3 cuadrados?



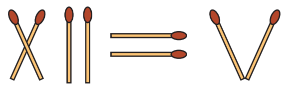
A) 4 B) 6 C) 1 D) 3 E) 5

22. ¿Cuántos cerillos se deben mover, como mínimo, para que la operación sea correcta?



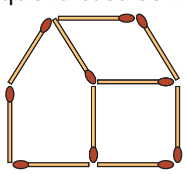
A) 5 B) 6 C) 7 D) 4 E) 2

23. ¿Cuántos cerillos hay que mover como mínimo para obtener una verdadera igualdad?



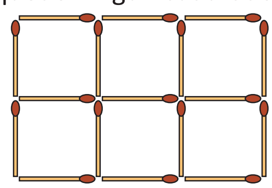
A) 1 B) 4 C) 2 D) 5 E) 3

24. ¿Cuántos palitos como mínimo debemos cambiar de posición para que la casa se vea de costado?



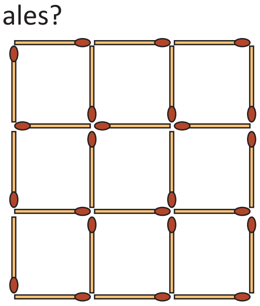
A) 5 B) 2 C) 3 D) 4 E) 1

25. ¿Cuántos cerillos se deben retirar, como mínimo, para que no quede ningún cuadrado?



A) 6 B) 3 C) 4 D) 1 E) 2

26. ¿Cuántos cerillos se deben quitar para obtener 4 cuadrados iguales?



A) 8 B) 4 C) 6 D) 7 E) 5

27. ¿Cuál es la mínima cantidad de cerillos que necesitas para construir cuatro triángulos equiláteros iguales?

A) 7 B) 5 C) 3 D) 4 E) 6

28. ¿Cuál es el máximo número de cuadrados que se pueden formar con 12 cerillos iguales, si la longitud del lado de los cuadrados debe ser la de un cerillo?

A) 5 B) 8 C) 12 D) 6 E) 10

29. ¿Cuántos cuadrados, cuyo lado sea un cerillo, se pueden formar como máximo con 15 cerillos?

A) 10 B) 7 C) 9 D) 11 E) 8

Claves

NIVEL 1
1. A
2. C
3. D
4. B
5. E
6. A
7. E
8. D
9. E
10. C

NIVEL 2
11. E
12. A
13. C
14. D
15. E
16. B
17. C
18. D
19. B

NIVEL 3
20. D
21. C
22. E
23. C
24. B
25. C
26. A
27. E
28. D
29. B

UNIDAD 4



El porqué de la forma de las antenas parabólicas

¿Quién no se ha preguntado alguna vez por qué las antenas parabólicas tienen exactamente esa forma y no otra? ¿Será por razones estéticas, o tal vez habrá alguna razón científica para ello? Pues, la razón es científica, matemática concretamente. Una parábola es una curva formada por los puntos que están a la misma distancia de un punto concreto, denominado foco, y de una recta concreta, llamada directriz.

Esta curva posee una interesante propiedad, por la cual los rayos paralelos al eje de simetría de la parábola son reflejados por la misma hacia su foco, es decir, que si yo envío un rayo hacia la parábola que sea paralelo a su eje, entonces esta lo refleja hacia su foco.

¿Y para qué puede servir esto? Pues muy sencillo. Si nosotros construimos una antena parabólica (paraboloide) y colocamos un receptor de señal en el foco del mismo, de cualquier lugar del mundo podremos enviar señales paralelas al eje del paraboloide con la total seguridad de que todas ellas serán recibidas por dicho receptor. O podemos orientar un paraboloide con un receptor en su foco hacia el sol para acumular así energía solar, que a pequeña escala puede aplicarse a la cocina y a gran escala en centrales de captación de energía solar.

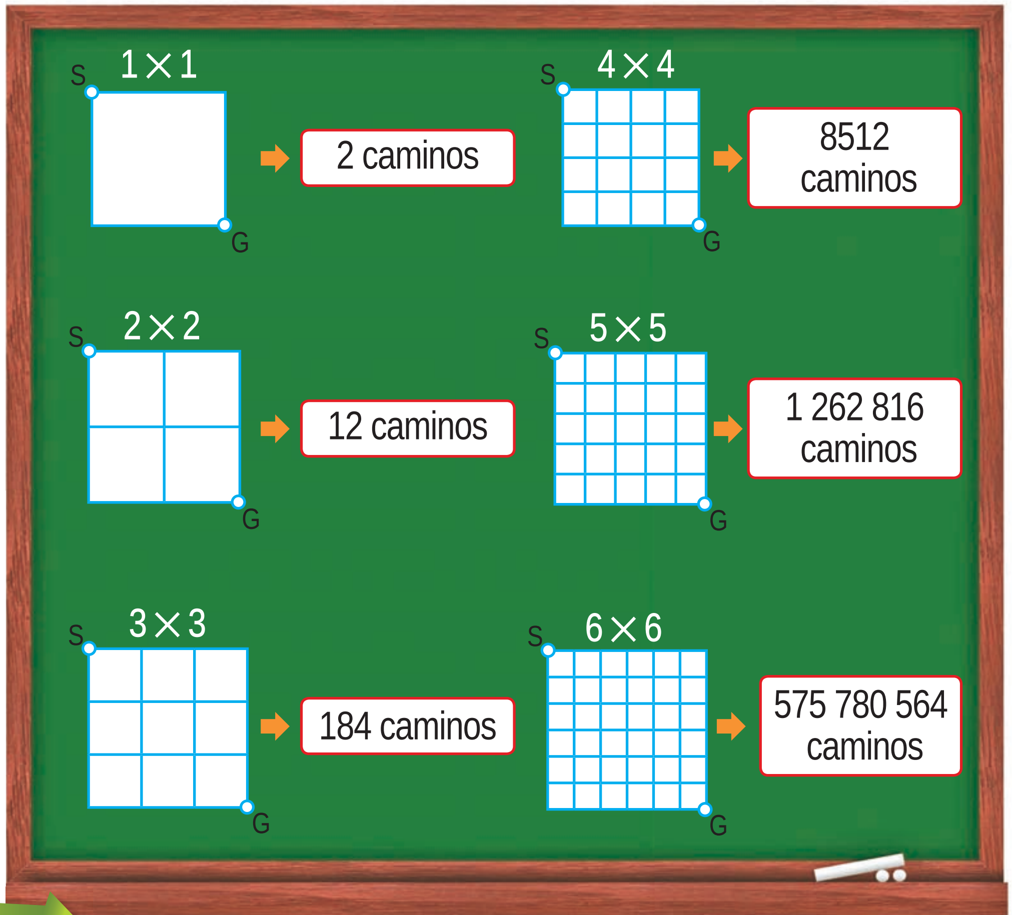
Matemática recreativa

Explosión combinatoria

La expresión explosión combinatoria describe el efecto de funciones que crecen muy rápidamente como resultado de consideraciones combinatorias.

Desarrollaremos un ejemplo muy descriptivo de este concepto.

La cuestión es sencilla: trata simplemente de contar los caminos mediante los que podemos llegar desde el vértice superior izquierdo (S) hasta el vértice inferior derecho (G) en una cuadrícula dependiendo de la complejidad de dicha cuadrícula.



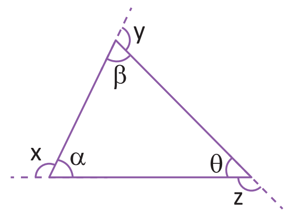
DIÁLOGO



Razonamiento geométrico

TRIÁNGULOS

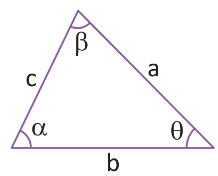
Propiedades básicas



$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

$$x + y + z = 360°$$

$$x = \beta + \theta$$
$$y = \alpha + \theta$$
$$z = \alpha + \beta$$



Si: $a > b > c$
$\Rightarrow \ \alpha > \beta > \theta$

Si: $a > b > c$

$$\Rightarrow \begin{cases} b - c < a < b + c \\ a - c < b < a + c \\ a - b < c < a + b \end{cases}$$

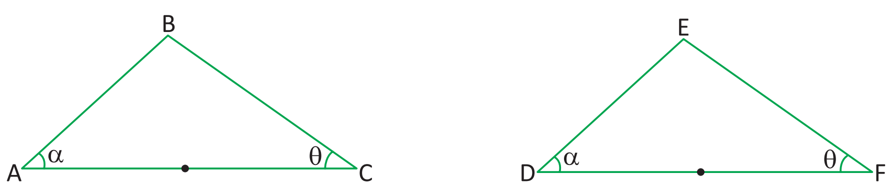
Congruencia

Caso LAL (Lado - Ángulo - Lado)



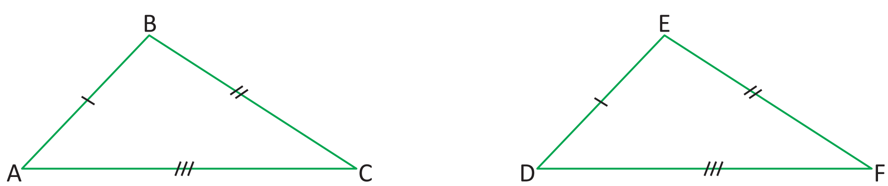
$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Caso ALA (Ángulo - Lado - Ángulo)



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

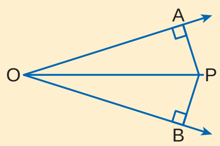
Caso LLL (Lado - Lado - Lado)



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Recuerda

Teorema de la bisectriz



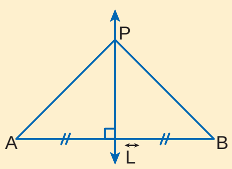
$\overline{OP}$: bisectriz

$PA = PB$ $\quad$ $OA = OB$



Recuerda

Teorema de la mediatriz



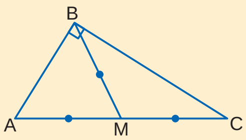
$\overleftrightarrow{L}$: mediatriz de $\overline{AB}$

$PA = PB$



Recuerda

Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

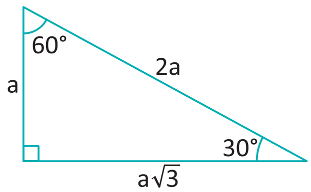


$\overline{BM}$: mediana

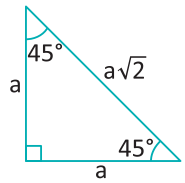
$\Rightarrow BM = \dfrac{AC}{2}$

Triángulos notables

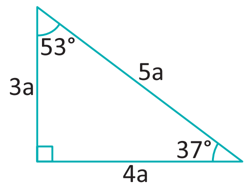
De 30° y 60°



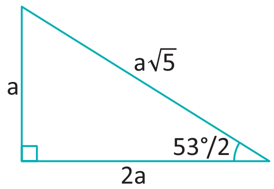
De 45°



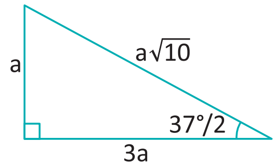
De 37° y 53°



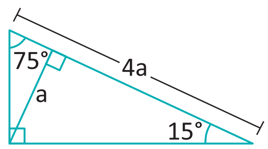
De 53°/2



De 37°/2



De 15° y 75°



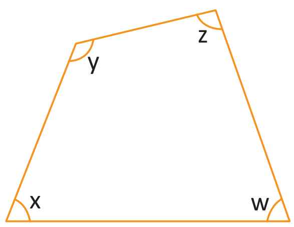
Atención

De los triángulos rectángulos que se han presentado, solo el de 30° y 60°, el de 45° y 45° y el de 15° y 75° tienen medidas angulares exactas. En el resto de triángulos, sus medidas angulares son cantidades aproximadas.



CUADRILÁTEROS

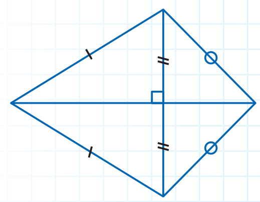
Propiedades básicas



$x + y + z + w = 360°$

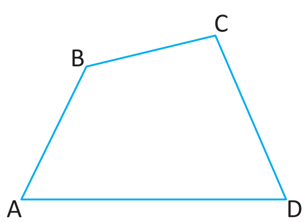
Nota

Trapezoide bisósceles

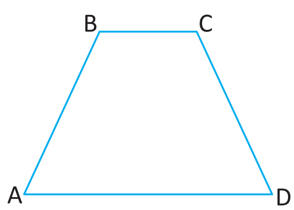


Clasificación

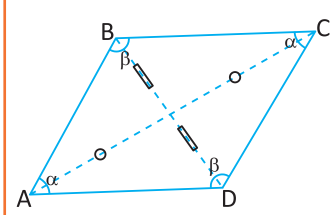
Trapezoide



Trapecio



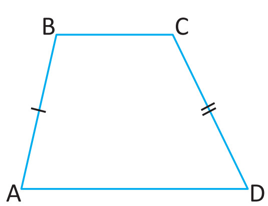
Paralelogramo



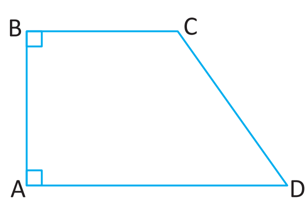


Tipos de trapecio

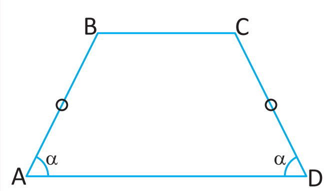
Escaleno



Rectángulo

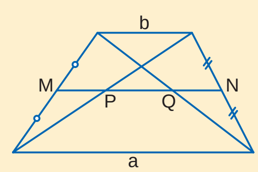


Isósceles



Importante

En el trapecio se cumple:

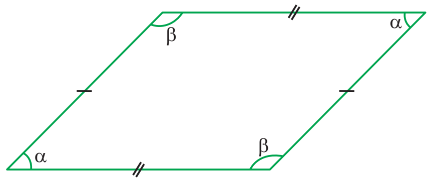


$MN = \frac{a + b}{2}$

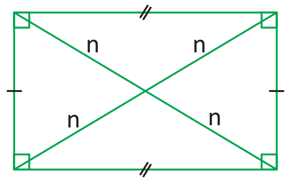
$PQ = \frac{a - b}{2}$

Tipos de paralelogramo

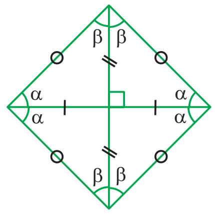
Romboide



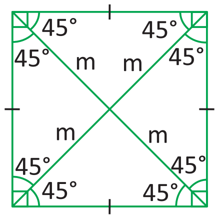
Rectángulo



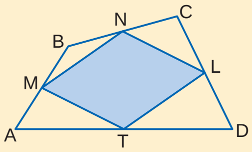
Rombo



Cuadrado



Atención



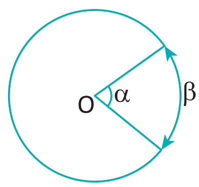
ABCD: cuadrilátero
M; N; L; T: puntos medios
⇒ MNLT: paralelogramo



CIRCUNFERENCIA

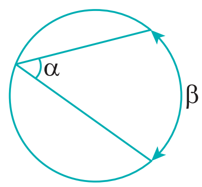
Ángulos en la circunferencia

Ángulo central



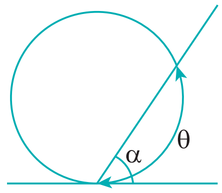
$\alpha = \beta$

Ángulo inscrito



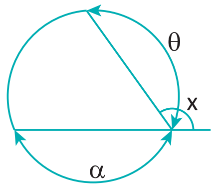
$\alpha = \frac{\beta}{2}$

Ángulo semi-inscrito



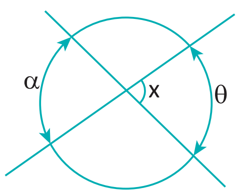
$\alpha = \frac{\theta}{2}$

Ángulo ex-inscrito



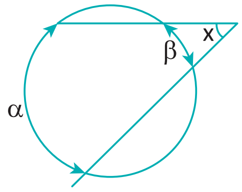
$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$

Ángulo interior

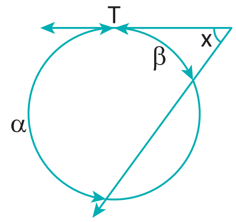


$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$

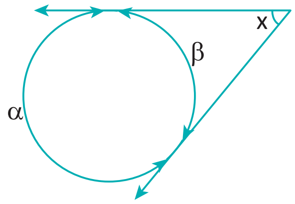
Ángulo exterior



$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$



$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

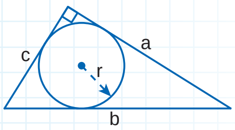


$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$

Además: $x + \beta = 180°$

Nota

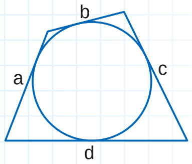
Teorema de Poncelet



$a + c = b + 2r$

Nota

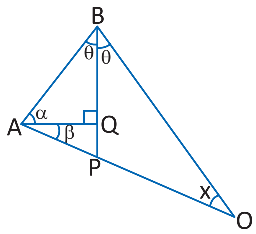
Teorema de Pitot



$a + c = b + d$

Problemas resueltos

1 Si $\alpha - \beta = 34°$, calcula x.



Resolución:

En el triángulo AQB se cumple:

$\alpha + \theta = 90°$ ...(I)

Por suma de ángulos internos:

$x + \alpha + \beta + 2\theta = 180°$ ...(II)

Multiplicando por 2 a (I) se tiene:

$2\alpha + 2\theta = 180°$ ...(III)

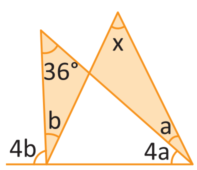
Igualamos (II) y (III):

$x + \alpha + \beta + 2\theta = 2\alpha + 2\theta$

$x = \underbrace{\alpha - \beta}$

$\therefore\ x = 34°$

2 Calcula x.



Resolución:

Por ángulo exterior:

$4b = 4a + 36°$

$4b - 4a = 36°$

$b - a = 9°$

Aplicando propiedad en la figura sombreada:

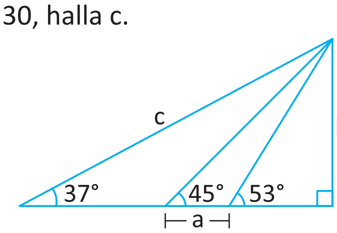
$x + a = b + 36°$

$x = 36° + \underbrace{b - a}$

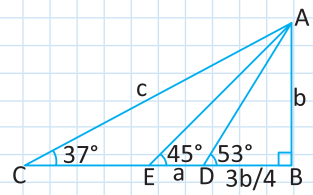
$x = 36° + \ \ 9°$

$\therefore\ x = 45°$

3 Si $a + b = 30$, halla c.



Resolución:



⊾ABD notable (37° y 53°)

$AB = b \Rightarrow BD = 3b/4$

⊾AEB notable (45°)

$AB = BE$

$b = a + \dfrac{3b}{4}$

$\dfrac{b}{4} = a \Rightarrow b = 4a$

Dato: $a + \underbrace{b} = 30$

$a + 4a = 30$

$5a = 30$

$a = 6 \Rightarrow b = 24$

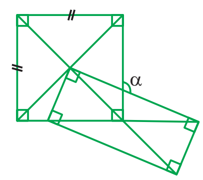
⊾ABC notable (37° y 53°)

$b = 24 = 3(8)$

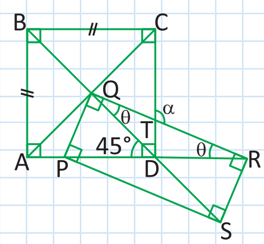
$\Rightarrow c = 5(8)$

$\therefore\ c = 40$

4 Halla α.



Resolución:



$AB = BC \Rightarrow$ ABCD es un cuadrado

PQRS: rectángulo

$QD = DR \Rightarrow m\angle RQD = m\angle DRQ = \theta$

⊾QDR: por ángulo exterior

$2\theta = 45° \Rightarrow \theta = 22,5°$

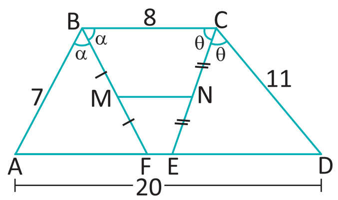
⊾DRT: por ángulo exterior

$\alpha = 90° + \theta$

$\alpha = 90° + 22,5°$

$\therefore\ \alpha = 112,5°$

5 Si $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, calcula MN.

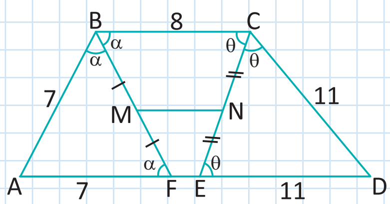


Resolución:

$\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Rightarrow \begin{cases} m\angle FBC = m\angle AFB = \alpha \\ m\angle ECB = m\angle DEC = \theta \end{cases}$

ΔABF: isósceles $\quad AB = AF = 7$

ΔECD: isósceles $\quad CD = ED = 11$



Del gráfico: $\quad AD = AF + FE + ED$

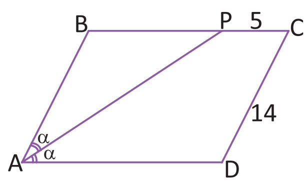
$20 = 7 + FE + 11$

$\Rightarrow FE = 2$

Finalmente: $\quad MN = \dfrac{BC + FE}{2} = \dfrac{8 + 2}{2}$

$\therefore\ MN = 5$

6 Si ABCD es un paralelogramo, CD = 14; PC = 5. Halla la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{PD}$.



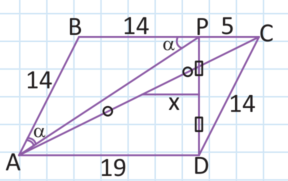
Resolución:

ABCD es un paralelogramo: $CD = AB = 14$

$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$m\angle DAP = m\angle BPA = \alpha$

ΔABP: isósceles $\quad AB = BP = 14$



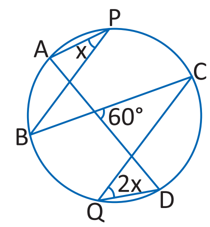
Piden

$x = \dfrac{AD - PC}{2}$

$x = \dfrac{19 - 5}{2}$

$\therefore\ x = 7$

7 Calcula x.



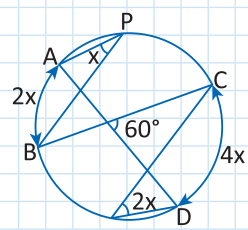
Resolución:

Por ángulo inscrito:

$x = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 2x$

Por ángulo inscrito:

$2x = \dfrac{m\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{CD} = 4x$



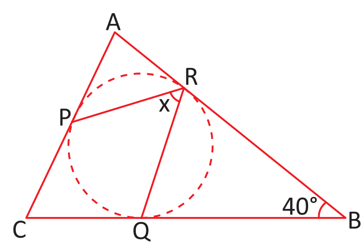
Por ángulo interior:

$60° = \dfrac{2x + 4x}{2}$

$120° = 6x$

$\therefore\ x = 20°$

8 Calcula x, si: AB = BC



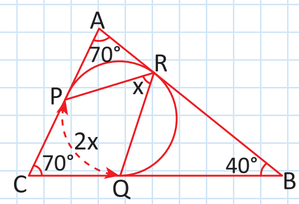
Resolución:

$AB = BC$

$m\angle CAB = m\angle BCA = 70°$

Por ángulo inscrito:

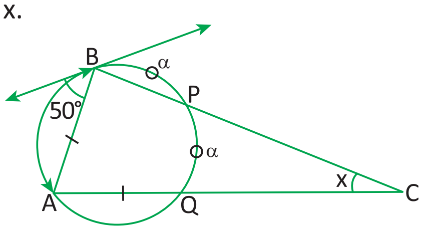
$x = \dfrac{m\overset{\frown}{PQ}}{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{PQ} = 2x$



Por propiedad: $70° + 2x = 180°$

$\therefore\ x = 55°$

9 Calcula x.



Resolución:

Por ángulo semi–inscrito:

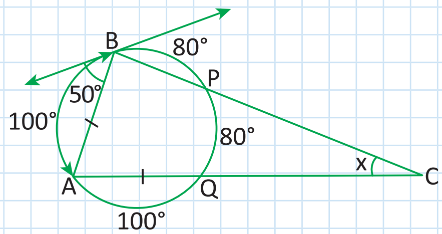
$50° = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 100°$

$AB = AQ \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{AQ}$

$m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BP} + m\overset{\frown}{PQ} + m\overset{\frown}{AQ} = 360°$

$100° + \alpha + \alpha + 100° = 360°$

$2\alpha = 160° \Rightarrow \alpha = 80°$

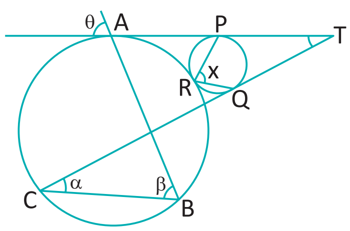


- Por ángulo exterior:

$x = \frac{100° - 80°}{2}$

$\therefore\ x = 10°$

10 Si: $\alpha + \beta - \theta = 80°$, calcula x.



Resolución:

Por ángulo inscrito:

$x = \frac{m\overset{\frown}{PQ}}{2} \Rightarrow m\overset{\frown}{PQ} = 2x$

Por propiedad: $m\angle PTQ = 180° - 2x$

Por propiedad:

$\alpha + \beta = \theta + 180° - 2x$

$\alpha + \beta - \theta = 180° - 2x$

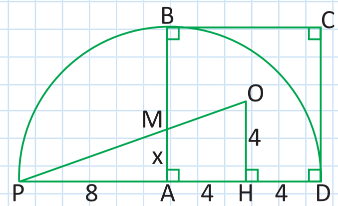
$80° = 180° - 2x$

$2x = 100°$

$\therefore x = 50°$

11 En una semicircunferencia de centro A y diámetro PD se construye el cuadrado ABCD. Halla AM; donde: $\{M\} = \overline{AB} \cap \overline{PO}$, si O es el centro del cuadrado y $PA = AD = 8$.

Resolución:



El lado del cuadrado = 8

$AH = HD = 4$

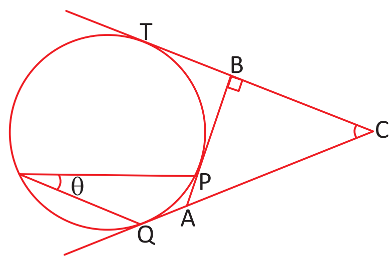
Como "O" es centro $\Rightarrow OH = 4$

Luego: $m\angle OPH = \frac{37°}{2} \Rightarrow \underbrace{PA}_{8} = 3x$

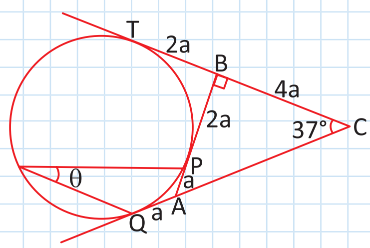
$8 = 3x$

$\therefore x = \frac{8}{3}$

12 En la figura, calcula θ; si T, Q y P son puntos de tangencia y $CB = 2(BT) = 4(AQ)$.



Resolución:



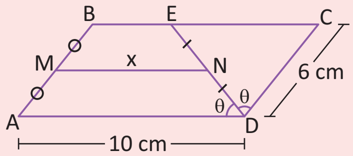
Sea $AQ = a \Rightarrow BT = 2a$ y $BC = 4a$

Luego el ⊿ABC es notable de 37° y 53°.

$\Rightarrow m\angle BAQ = 127°$

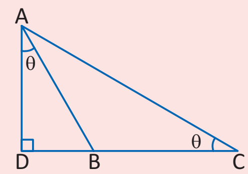
$m\overset{\frown}{QP} = 53° \quad \therefore\ \theta = \frac{53°}{2}$

1. En el gráfico ABCD es un paralelogramo, calcula x.



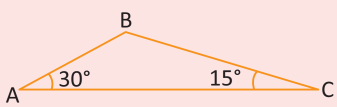
A) 8 cm B) 10 cm C) 5 cm
D) 6 cm E) 7 cm

2. En la figura observada, calcula DB, si AB = BC = 10 cm.



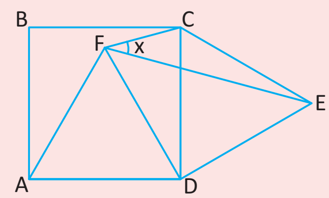
A) 4 cm B) 8 cm C) 7 cm
D) 10 cm E) 5 cm

3. En el gráfico, se tiene el triángulo ABC, si AC = 8 u, calcula BC.



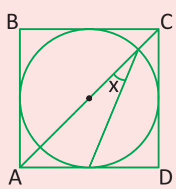
A) 2 u B) 5 u C) $4\sqrt{2}$ u
D) 3 u E) 6 u

4. Halla el valor de x. ABCD es un cuadrado, CDE y AFD son triángulos equiláteros.



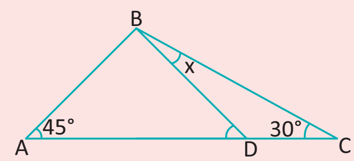
A) 60° B) 70° C) 30°
D) 20° E) 45°

5. Halla el valor de x. ABCD es un cuadrado.



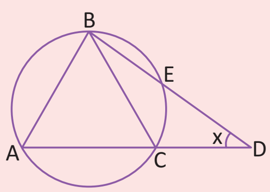
A) 32,5° B) 22,5° C) 45°
D) 20° E) 30°

6. En la figura, BC = AD = 2 m, calcula x.



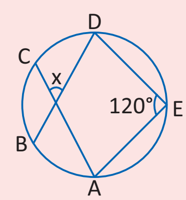
A) 53° B) 37° C) 30°
D) 75° E) 15°

7. En la figura, $m\overset{\frown}{BE} = 80°$; AB = BC.
Halla el valor de x.



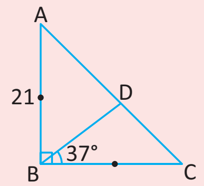
A) 20° B) 60° C) 80°
D) 30° E) 40°

8. En la figura: $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{CD}$, calcula x.



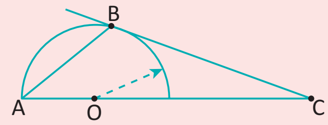
A) 40° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 50°

9. En el gráfico mostrado, calcula BD.



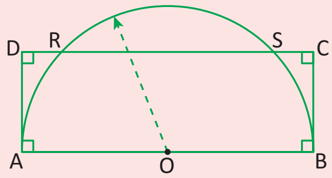
A) 9 B) 10 C) 12
D) 15 E) 24

10. Calcula m∠ABC, si m∠BCA = 50°.



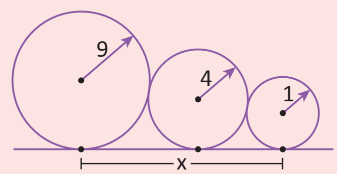
A) 100° B) 120° C) 115°
D) 110° E) 105°

11. Calcula AB si RS = 8 y AD = 3.



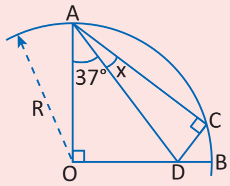
A) 3 B) 10 C) 11
D) 8 E) 5

12. Calcula x.



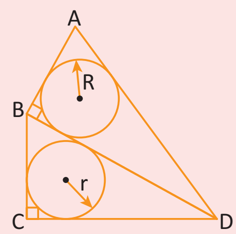
A) 4 B) 8 C) 12
D) 16 E) 20

13. Sea “O” el centro de la circunferencia, halla x.



A) 30° B) 60° C) 8°
D) 53° E) 45°

14. En la figura, AD = BC + CD; AB = 28, calcula: R + r



A) 14 B) 8 C) 6
D) 12 E) 10

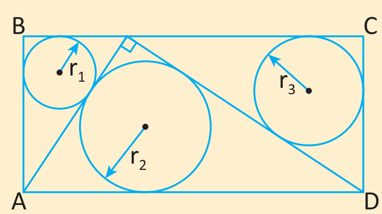
Claves

1. E
2. E
3. C
4. C
5. B
6. E
7. E
8. D
9. D
10. D
11. B
12. D
13. C
14. A

Reto

En el rectángulo ABCD, calcula AB.



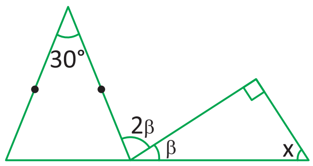


Rpta.: AB = $r_1 + r_2 + r_3$

Refuerza practicando

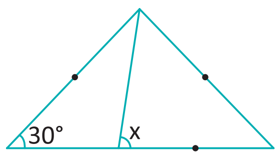
NIVEL 1

1. Calcula x, según la figura:



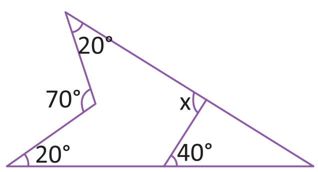
A) 50°
B) 45°
C) 55°
D) 35°
E) 60°

2. Del gráfico, calcula x.



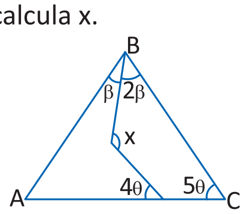
A) 40°
B) 50°
C) 65°
D) 75°
E) 60°

3. De la figura, calcula x.



A) 560°
B) 70°
C) 40°
D) 80°
E) 50°

4. En el esquema, el triángulo ABC es equilátero, calcula x.

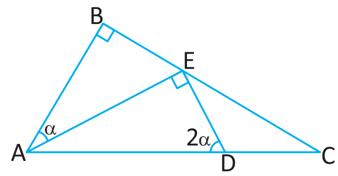


A) 120°
B) 110°
C) 100°
D) 132°
E) 128°

5. En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la altura BH y la bisectriz AE las cuales se cortan en P, si BP = 8 u, calcula BE.

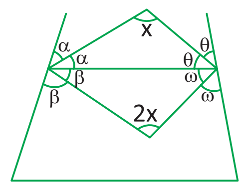
A) 8 u B) 6 u C) 7 u D) 5 u E) 4 u

6. De la figura mostrada, calcula α, si AD = 2(DC).



A) 40°
B) 60°
C) 45°
D) 30°
E) 50°

7. Según la figura calcula x.



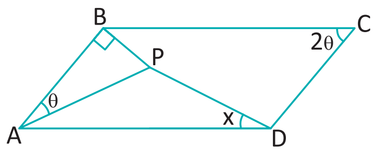
A) 40°
B) 70°
C) 50°
D) 60°
E) 80°

8. Indica V (verdadero) o F (falso) en las siguientes proposiciones:

I. Los ángulos opuestos de todo paralelogramo tienen la misma medida. ( )
II. Las diagonales de un rombo tienen la misma longitud. ( )
III. Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios. ( )
IV. Las diagonales de un cuadrado tienen la misma longitud. ( )

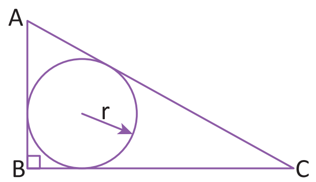
A) VFVV B) VVFF C) FVVV
D) VFFV E) FFVV

9. Si ABCD es un romboide, calcula x, si PD = 2BP.



A) 53°
B) 45°
C) 30°
D) 37°
E) 60°

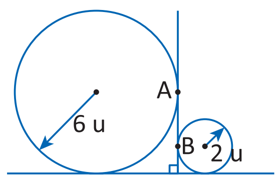
10. En la figura AB = 18 cm y BC = 24 cm. Calcula la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. **UNMSM 2006-II**



A) 12 cm
B) 6 cm
C) 8 cm
D) 4 cm
E) 10 cm

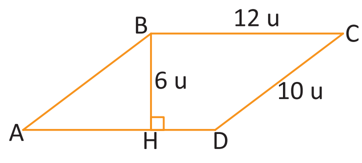
NIVEL 2

11. En la figura mostrada, calcula AB, si A y B son puntos de tangencia.



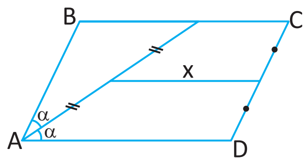
A) 5 u
B) $\sqrt{3}$ u
C) $\sqrt{2}$ u
D) 1 u
E) 4 u

12. Según la figura mostrada, ABCD es un romboide. Calcula: HD



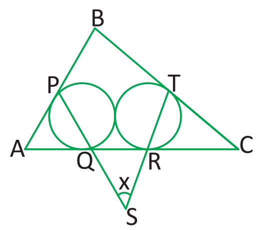
A) 3 u
B) 7 u
C) 4 u
D) 6 u
E) 5 u

13. Si ABCD es un paralelogramo, calcula x, si AB = 8 cm, AD = 12 cm.



A) 8 cm
B) 12 cm
C) 6 cm
D) 5 cm
E) 16 cm

14. En la figura mostrada, calcula x, si m∠A = 60°; m∠C = 40 °(P; T; Q; R puntos de tangencia).



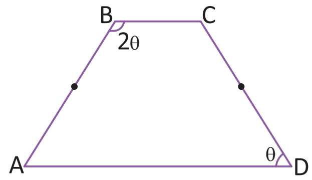
A) 50°
B) 40°
C) 80°
D) 60°
E) 70°

15. En un triángulo ABC, se traza la mediana BM. Las circunferencias inscritas en el triángulo ABM y BMC determinan los puntos de tangencia P y Q sobre BM. Calcula PQ, si: BC – AB = 12 u

UNI 2008-II

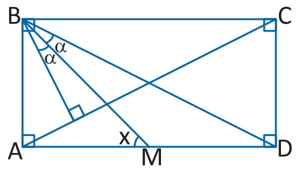
A) 9 u B) 12 u C) 4 u D) 8 u E) 6 u

16. En la figura $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, AB = 8 m y BC = 4 m
Calcula: AD



A) 6 m
B) 12 m
C) 16 m
D) 8 m
E) 10 m

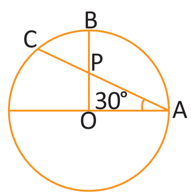
17. De la figura, calcula x.



A) 60°
B) 30°
C) 50°
D) 20°
E) 45°

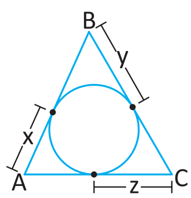
18. Según el gráfico mostrado, calcula la medida del ángulo CBO, si "O" es centro de la circunferencia.

UNMSM 1998



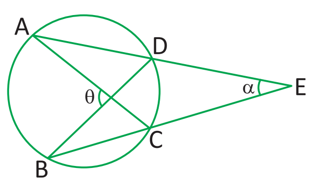
A) 60°
B) 45°
C) 53°
D) 75°
E) 40°

19. Según la figura mostrada, calcula "$x + y + z$"; si $AB = 18$ cm, $BC = 19$ cm, $AC = 17$ cm.



A) 27 cm
B) 28 cm
C) 29 cm
D) 31 cm
E) 30 cm

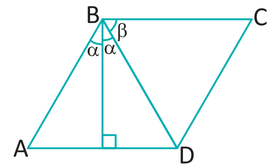
20. Según la figura que se presenta, calcula α y θ, si: $m\overset{\frown}{AB} = 100°$; $m\overset{\frown}{CD} = 40°$



A) 50°; 60°
B) 20°; 60°
C) 40°; 70°
D) 30°; 70°
E) 30°; 80°

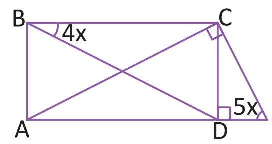
NIVEL 3

21. Se muestra el rombo ABCD, calcula β.



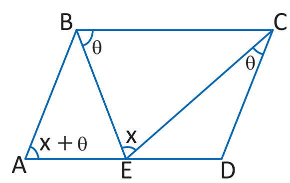
A) 20°
B) 40°
C) 50°
D) 30°
E) 60°

22. En la figura, ABCD es un rectángulo, calcula x.



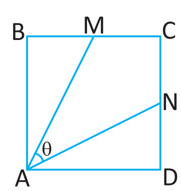
A) 10°
B) 50°
C) 25°
D) 20°
E) 30°

23. En la figura ABCD es un paralelogramo. Calcula BC si $BE = 8$ m.



A) 5 m
B) 8 m
C) 7 m
D) 6 m
E) 4 m

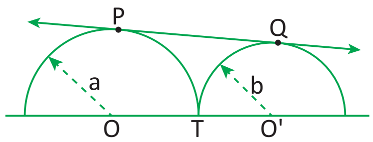
24. En la figura, ABCD es un cuadrado. Calcula θ, si M y N son puntos medios.



A) 37°
B) 30°
C) 60°
D) 53°
E) 45°

(25) En la figura: P; Q y T son puntos de tangencia, a y b son los radios de las semicircunferencias. Determina la distancia del punto T a la recta PQ.

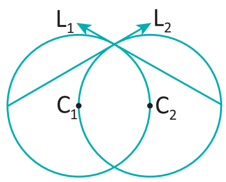
UNMSM 2001



A) $2\sqrt{ab}$
B) $\sqrt{a^2+b^2}$
C) $\sqrt{ab}$
D) $\dfrac{ab}{a+b}$
E) $\dfrac{2a\,.\,b}{a+b}$

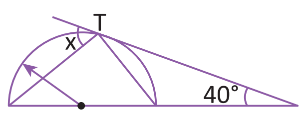
(26) La circunferencia de centros C_1 y C_2 tienen el mismo radio que es igual a $C_1\,C_2$. Calcula la suma de los ángulos agudos que forman las rectas tangentes $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

UNMSM 2004



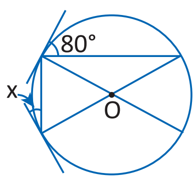
A) 80°
B) 60°
C) 120°
D) 70°
E) 30°

(27) Si T es punto de tangencia, calcula x.



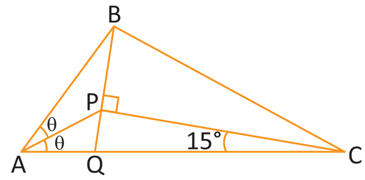
A) 45°
B) 55°
C) 65°
D) 70°
E) 80°

(28) Calcula x si O es centro de la circunferencia.



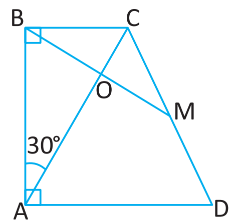
A) 15°
B) 12°
C) 20°
D) 18°
E) 10°

(29) Halla θ si: $BP = \dfrac{QC}{2}$



A) 45°
B) $\dfrac{53°}{2}$
C) $\dfrac{37°}{2}$
D) $\dfrac{45°}{2}$
E) 30°

(30) En la figura halla AO. (M punto medio de $\overline{CD}$), BO = 2 cm; OM = 5 cm.



A) $\dfrac{10\sqrt{7}}{7}$ cm
B) $\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$ cm
C) $\dfrac{8\sqrt{39}}{13}$ cm
D) $\dfrac{5\sqrt{7}}{7}$ cm
E) $\dfrac{11\sqrt{7}}{7}$ cm

Claves

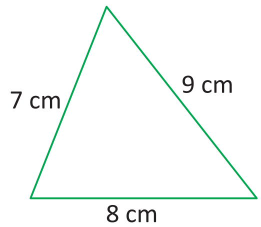
NIVEL 1
1. C
2. D
3. B
4. E
5. A
6. D
7. D
8. A
9. C
10. B

NIVEL 2
11. E
12. C
13. A
14. A
15. E
16. B
17. E
18. D
19. A
20. D

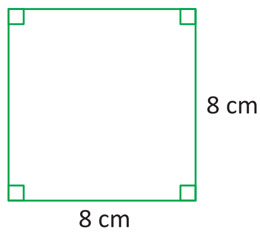
NIVEL 3
21. E
22. A
23. B
24. A
25. E
26. C
27. C
28. E
29. D
30. C

Perímetros y áreas

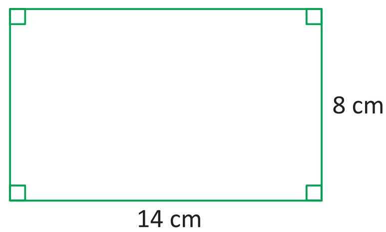
PERÍMETROS



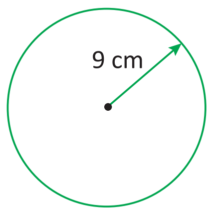
$2p = 7 + 8 + 9 = 24$ cm



$2p = 8(4) = 32$ cm

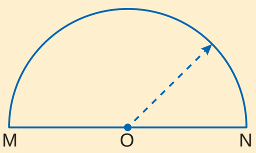


$2p = 2(14 + 8) = 44$ cm



$$L = 2\pi \cdot r$$
$$= 2\pi \cdot 9$$
$$= 18\pi \text{ cm}$$

Atención

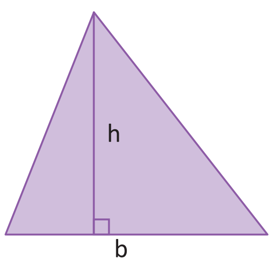


$$L_{\frown MN} = \frac{MN}{2} \cdot \pi$$

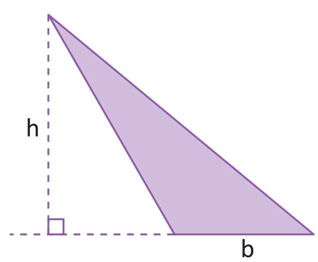


ÁREAS

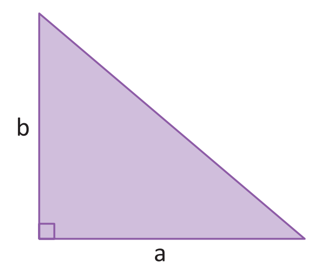
Áreas de regiones triangulares



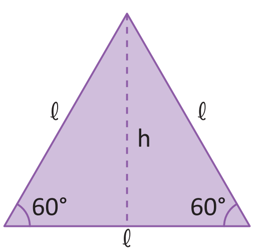
$$A = \frac{b.h}{2}$$



$$A = \frac{b.h}{2}$$

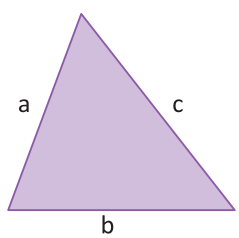


$$A = \frac{a.b}{2}$$



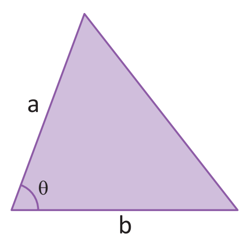
$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$$



$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

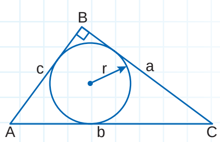
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



$$A = \frac{a.b}{2}\,\text{sen}\theta$$

Nota

Teorema de Poncelet

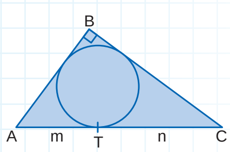


$a + c = b + 2r$

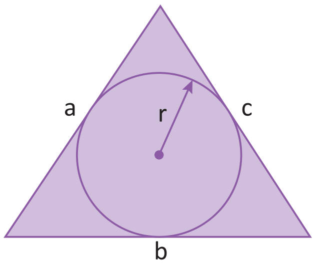


Nota

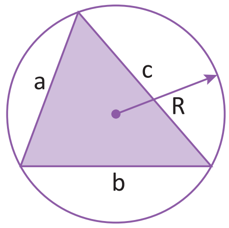
Teorema de Burlet



$A_{\Delta ABC} = m \cdot n$

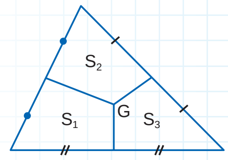


$$p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow \boxed{A = p \cdot r}$$



$$\boxed{A = \frac{a.b.c}{4R}}$$

Nota

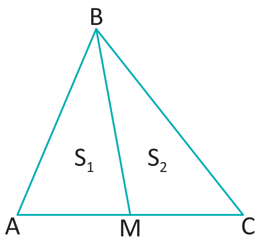


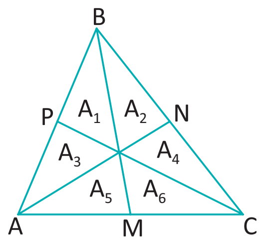
G: baricentro

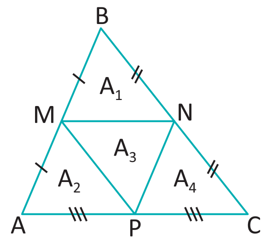
$S_1 = S_2 = S_3$

Propiedades de las medianas de un triángulo









Si $\overline{BM}$ es mediana

$\boxed{S_1 = S_2}$

Si $\overline{AN}$, $\overline{BM}$ y $\overline{CP}$ son medianas:

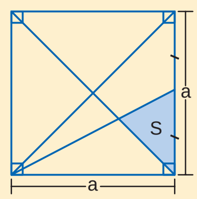
$\boxed{A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = A_6}$

Si M; N y P son puntos medios:

$\boxed{A_1 = A_2 = A_3 = A_4}$

Recuerda

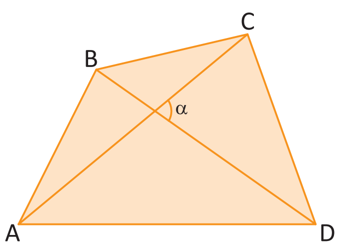
Propiedad



$$\boxed{S = \frac{a^2}{12}}$$

Áreas de regiones cuadrangulares

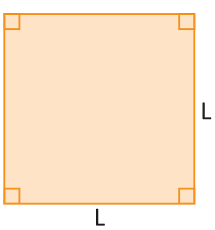
Cuadrilátero



$$\boxed{A = \frac{(AC)(BD)}{2}\operatorname{sen}\alpha}$$

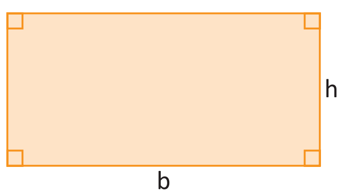


Cuadrado



$$\boxed{A = L^2}$$

Rectángulo

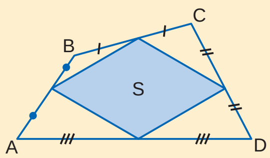


$$\boxed{A = b \times h}$$



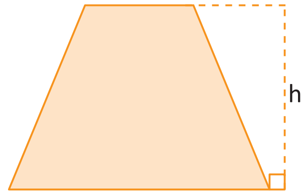
Atención

ABCD: trapezoide



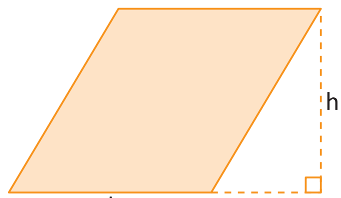
$S = \frac{1}{2}A_{\square ABCD}$

Trapecio



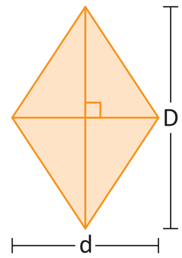
$A = \left(\frac{a+b}{2}\right) . h$

Romboide



$A = b . h$

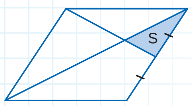
Rombo



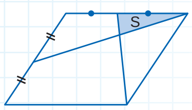
$A = \frac{D . d}{2}$

Nota

También:

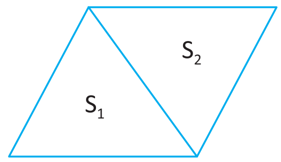


$S = \frac{1}{12}A_{total}$

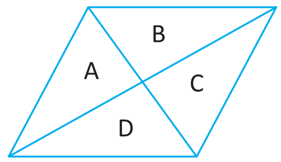


$S = \frac{1}{20}A_{total}$

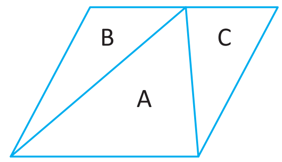
Propiedades en el paralelogramo



$S_1 = S_2$

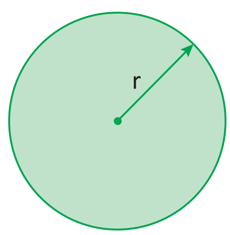


$A = B = C = D$



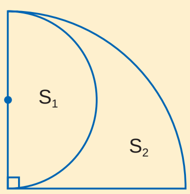
$A = B + C$

Áreas de regiones circulares



$A = \pi . r^2$

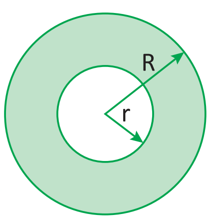
Observación



$S_1 = S_2$

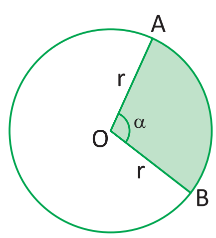


Corona circular



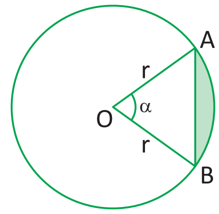
$A = \pi(R^2 - r^2)$

Sector circular



$A = \frac{\pi . r^2 . \alpha}{360°}$

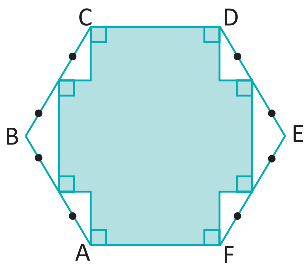
Segmento circular



$A = \frac{\pi . r^2 . \alpha}{360°} - \frac{r^2 \operatorname{sen}\alpha}{2}$

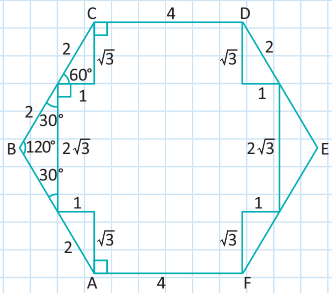
Problemas resueltos

1 Halla el perímetro de la región sombreada, si se sabe que el perímetro del hexágono regular es 24 cm.



Resolución:

Como el perímetro del hexágono regular es 24 cm, entonces el lado mide 4 cm y la medida de cada ángulo interior es 120°.

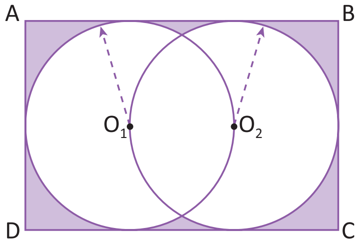


Luego: $2p = 2(4) + 4(1) + 4\left(\sqrt{3}\right) + 2\left(2\sqrt{3}\right)$

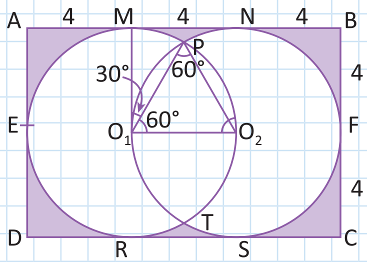
$= 8 + 4 + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

$= \left(12 + 8\sqrt{3}\right)$ cm

2 Halla el perímetro de la región sombreada si AB = 12 cm (O_1 y O_2 son centros).



Resolución:



Del gráfico:

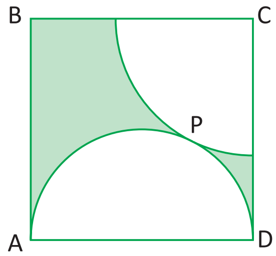
$2p = L_{\overset{\frown}{MER}} + L_{\overset{\frown}{NFS}} + 4L_{\overset{\frown}{MP}} + AB + BC + CD + AD$

$= \dfrac{2\pi.4}{2} + \dfrac{2\pi.4}{2} + 4\left(\dfrac{2\pi.4}{12}\right) + 12 + 8 + 12 + 8$

$= 4\pi + 4\pi + \dfrac{8}{3}\pi + 40$

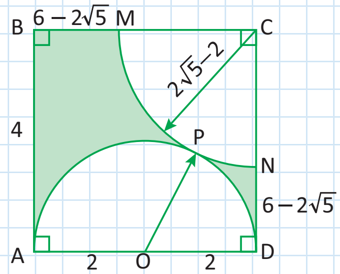
$= \left(32\dfrac{\pi}{3} + 40\right)$ cm

3 En la figura mostrada ABCD es un cuadrado de área 16 m^2. Calcula el perímetro de la región sombreada (P: punto de tangencia).



Resolución:

Como el área del cuadrado es 16 m^2, entonces el lado del cuadrado es 4 m.



Del gráfico:

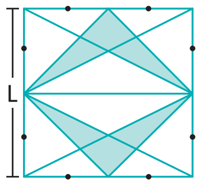
$2p = L_{\overset{\frown}{MPN}} + L_{\overset{\frown}{APD}} + AB + BM + ND$

$2p = \dfrac{2\pi\left(2\sqrt{5} - 2\right)}{4} + \dfrac{2\pi.2}{2} + 4 + 6 - 2\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5}$

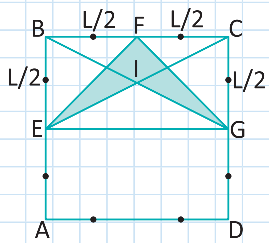
$2p = \pi(\sqrt{5} - 1) + 2\pi + 16 - 4\sqrt{5}$

$2p = (\sqrt{5} + 1)\pi + 16 - 4\sqrt{5}$ m

4 Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:



El área sombreada será igual a la diferencia entre el área del ΔEFG menos el área del ΔEIG, pero multiplicado por 2.

Luego:

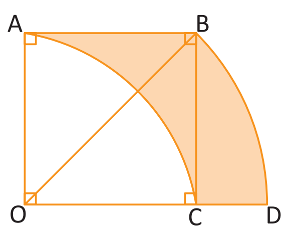
$$A_{sombreada} = 2[A_{\Delta EFG} - A_{\Delta EIG}]$$

$$= 2\left[\frac{L}{2}.\frac{L}{2} - \frac{L}{2}.\frac{L}{4}\right]$$

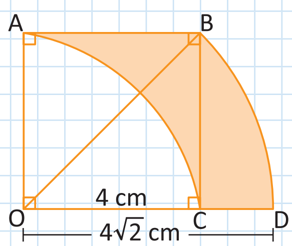
$$= 2\left[\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{8}\right]$$

$$\therefore A_{sombreada} = \frac{L^2}{4}$$

5 Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4 cm, halla el área de la región sombreada, si O es centro del arco BD.



Resolución:



Del gráfico:

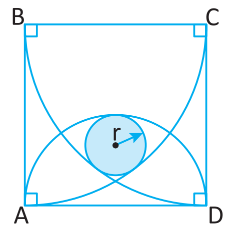
$$A_{sombreada} = A_{\sphericalangle OBD} + A_{\triangle OAB} - A_{\triangle AOC}$$

$$= \frac{\pi(4\sqrt{2})^2.45°}{360°} + \frac{4.4}{2} - \frac{\pi.4^2}{4}$$

$$= 4\pi + 8 - 4\pi$$

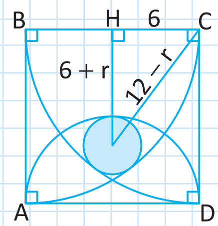
$$= 8\ cm^2$$

6 ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 12 cm. Si los vértices C y B se han tomado como centros de circunferencias para el trazado de $\overset{\frown}{AC}$ y $\overset{\frown}{BD}$. Además $\overset{\frown}{AD}$ es diámetro de una semicircunferencia. Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:

Para hallar el área sombreada solo bastará calcular el radio "r" de la circunferencia.



Del gráfico:

Por Pitágoras: $6^2 + (6 + r)^2 = (12 - r)^2$

$$36 + 36 + 12r + r^2 = 144 - 24r + r^2$$

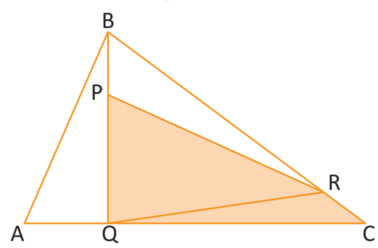
$$36\ r = 72$$

$$r = 2$$

Del gráfico:

$A_{sombreada} = \pi\ .\ 2^2 = 4\pi\ cm^2$

7 Si: $A_{\Delta ABQ} = 12\ m^2$; AC = 4AQ; BC = 6RC; BQ = 3BP. Halla el área de la región sombreada.



Resolución:

AC = 4AQ ⇒ AQ = a ∧ QC = 3a

$A_{\Delta ABQ} = 12 \Rightarrow A_{\Delta BQC} = 3(12) = 36\ m^2$

BC = 6RC ⇒ RC = b; BR = 5b

$A_{\Delta QRC} = \frac{1}{6} A_{\Delta BQC}$

$A_{\Delta QRC} = \frac{1}{6}(36) = 6\ m^2$

$\Rightarrow A_{\Delta BQR} = 5(6) = 30\ m^2$

BQ = 3BP ⇒ BP = c ∧ PQ = 2c

$A_{\Delta BPR} = \frac{1}{3} A_{\Delta BQR}$

$= \frac{1}{3}(30) = 10\ m^2$

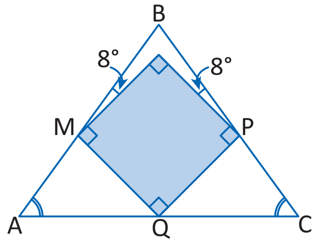
$\Rightarrow A_{\Delta PRQ} = 2(10) = 20\ m^2$

Finalmente:

$A_{sombreada} = A_{\Delta PQR} + A_{\Delta QRC}$

$= 20 + 6 = 26\ m^2$

8 Calcula el área de la región sombreada sabiendo que se trata de un cuadrado, y el triángulo ABC es isósceles, donde AB = BC = 35 cm.



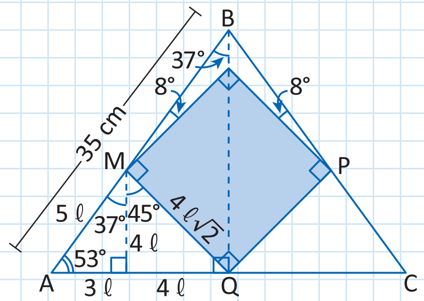
Resolución:

∡MBPN: 8° + m∠MBP + 8° = 90°

⇒ m∠MBP = 74°

ΔABC: $\overline{BQ}$ es bisectriz, altura y mediana

⇒ m∠ABQ = 37° y m∠MAQ = 53°



Del gráfico: 7ℓ = 21

ℓ = 3 cm

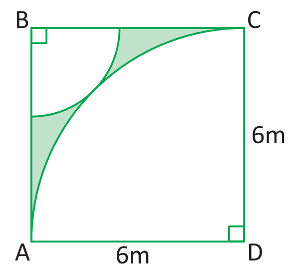
Finalmente:

$A_{sombreada} = (4\ell\sqrt{2})^2$

$= (4(3)\sqrt{2})^2$

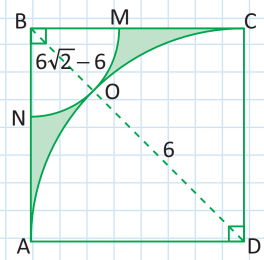
$= 288\ cm^2$

9 En el gráfico, ABCD es un cuadrado. Calcula el área de la región sombreada.



Resolución:

Trazamos $\overline{BD}$, entonces $BD = 6\sqrt{2}$ m.



Según el gráfico:

$A_{sombreada} = A_{\square ABCD} - (A_{\angle ADC} + A_{\angle MBN})$

$= 6^2 - \left(\frac{\pi.6^2}{4} + \frac{\pi}{4}\left[6(\sqrt{2}-1)\right]^2\right)$

$= 36 - (9\pi + \frac{\pi}{4}[36(2-2\sqrt{2}+1)])$

$= 36 - (9\pi + 9\pi(3 - 2\sqrt{2}))$

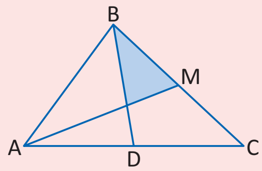
$= 36 - (9\pi + 27\pi - 18\pi\sqrt{2})$

$= 36 - 36\pi + 18\pi\sqrt{2}$

$= 18(2 - 2\pi + \pi\sqrt{2})\ m^2$

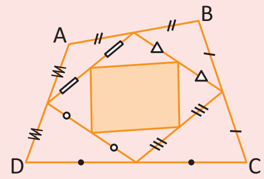
Actividades de razonamiento

1. Calcula el área de la región sombreada, si el área de la región triangular ABC es 66 m^2; $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$ son medianas.



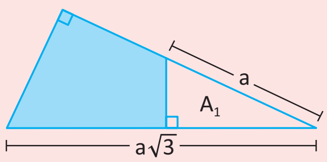
A) 12 m^2 B) 11 m^2 C) 13 m^2
D) 15 m^2 E) 16 m^2

2. Halla el área de la región sombreada, sabiendo que el área del trapezoide ABCD es 64 m^2.



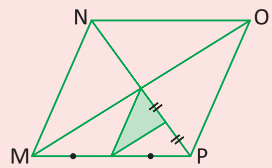
A) 16 m^2 B) 32 m^2 C) 8 m^2
D) 24 m^2 E) 40 m^2

3. Calcula el área de la región sombreada si A_1 es 4 m^2.



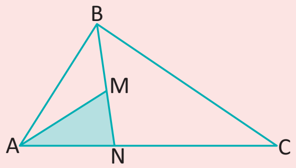
A) 12 m^2 B) 10 m^2 C) 8 m^2
D) 6 m^2 E) 4 m^2

4. Halla el área de la región sombreada sabiendo que el área del paralelogramo MNOP es 72.



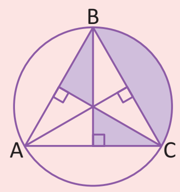
A) 4,5 B) 4 C) 4,6
D) 8 E) 3

5. Del gráfico, BM = MN, CN = 2(AN) ¿qué parte del área de la región triángular ABC es el área de la región sombreada?



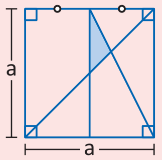
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

6. Calcula la razón entre el área de la región sombreada y el área del círculo (el ΔABC es equilátero).



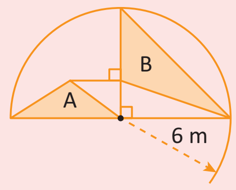
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

7. Halla el área de la región sombreada.



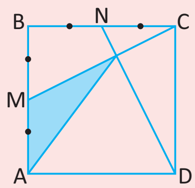
A) $\frac{a^2}{9}$ B) $\frac{a^2}{24}$ C) $\frac{a^2}{36}$ D) $\frac{a^2}{5}$ E) $\frac{a^2}{35}$

8. Del grafico, calcula A + B.



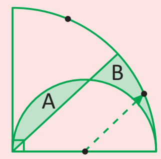
A) 25 m^2 B) 15 m^2 C) 18 m^2 D) 9 m^2 E) 20 m^2

9. Si el área del cuadrado ABCD es igual a 20 cm^2, halla el área de la región sombreada.



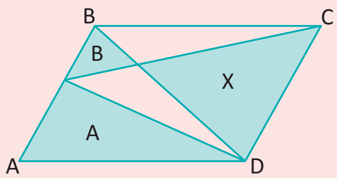
A) 1 cm^2 B) 2 cm^2 C) 3 cm^2
D) 4 cm^2 E) 5 cm^2

10. Calcula: $\frac{A}{B}$ en la figura mostrada.



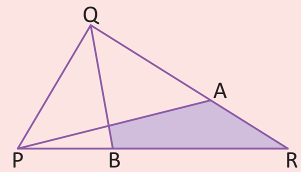
A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 2/3 E) 1/3

11. Si ABCD es un paralelogramo, calcula X.



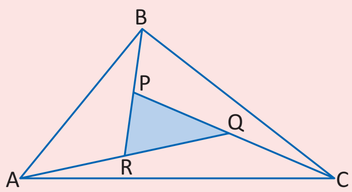
A) 4 + 3B B) A – B C) A + B
D) 4A – B E) A/B

12. Del gráfico mostrado, QA = 2(AR); BR = 2(PB), calcula el área de la región sombreada si el área de la región triangular PQR es 210 m^2.



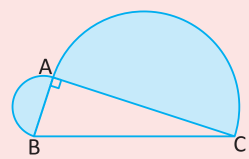
A) 105 m^2 B) 90 m^2 C) 60 m^2
D) 70 m^2 E) 100 m^2

13. Calcula el área de la región sombreada, si AR = RQ, BP = PR, PQ = QC y el área de la región triangular ABC es 28 m^2.



A) 4 m^2 B) 6 m^2 C) 8 m^2
D) 10 m^2 E) 12 m^2

14. Calcula la suma de las áreas de los semicírculos sombreados si BC = a.



A) πa^2 B) $\left(\frac{\pi}{2}\right)a^2$ C) $\left(\frac{\pi}{4}\right)a^2$
D) $\left(\frac{\pi}{8}\right)a^2$ E) $\left(\frac{\pi}{16}\right)a^2$

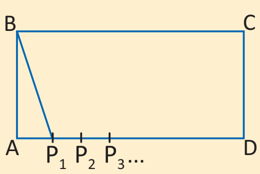
Claves

1. B	5. E	9. C	13. A
2. A	6. B	10. A	14. D
3. C	7. B	11. C	
4. A	8. C	12. C	

Reto



El área del triángulo AP_1B es de 1 m^2. Si $\overline{AD}$ se subdivide en n segmentos cuyas longitudes están en progresión geométrica de razón 2, halla el área del rectángulo ABCD.

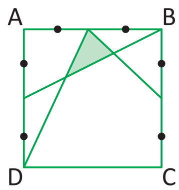


Rpta.: 2(2n – 1) m^2

Refuerza practicando

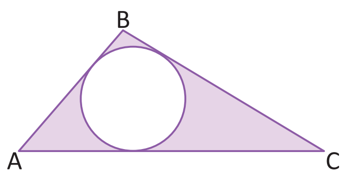
NIVEL 1

1. El área de la región cuadrada ABCD es 480 m^2. Calcula el área de la región sombreada.



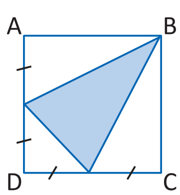
A) 15 m^2 B) 18 m^2 C) 20 m^2
D) 16 m^2 E) 24 m^2

2. Se tiene el triángulo ABC, recto en B, si AB = 21 m y AC =35 m, calcula el área de la región sombreada.



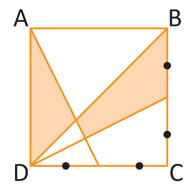
A) $36(6 - \pi)\ m^2$ B) $39(8 - \pi)\ m^2$
C) $42(6 - \pi)\ m^2$ D) $49(6 - \pi)\ m^2$
E) $36(8 - \pi)\ m^2$

3. Calcula el área de la región cuadrada ABCD, sabiendo que el área de la región sombreada es 30 m^2.



A) 82 m^2 B) 86 m^2 C) 90 m^2
D) 94 m^2 E) 80 m^2

4. Calcula el área de la región sombreada, sabiendo que el lado del cuadrado ABCD es **a** metros.

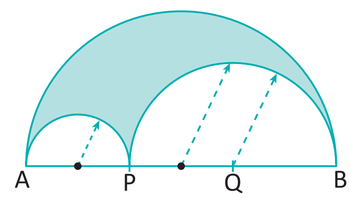


A) $\frac{22a^2}{57}\ m^2$ B) $\frac{23a^2}{62}\ m^2$ C) $\frac{23a^2}{60}\ m^2$

D) $\frac{22a^2}{61}\ m^2$ E) $\frac{25a^2}{57}\ m^2$

5. En la figura $\overline{AB}$, $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ son diámetros, AB = d. P y Q dividen a $\overline{AB}$ en partes iguales. Halla el área de la parte sombreada.

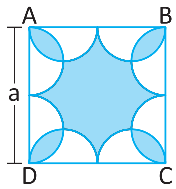
UNMSM 2004-II



A) $\frac{1}{24}\pi d^2$ B) $\frac{1}{12}\pi d^2$ C) $\frac{4}{9}\pi d^2$

D) $\frac{2}{3}\pi d^2$ E) $\frac{1}{18}\pi d^2$

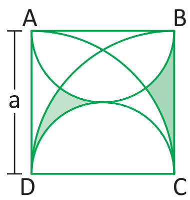
6 Calcula el área de la región sombreada en el cuadrado ABCD. Todos son semicírculos.



A) $\frac{a^2}{3}$ B) $\frac{a^2}{2}$ C) $\frac{a^2}{5}$

D) $\frac{2a^2}{5}$ E) $\frac{3a^2}{5}$

7 Calcula el área de la región sombreada en el siguiente cuadrado ABCD.



A) $\frac{a^2}{4}(4+\pi)$ B) $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$ C) $\frac{a^2}{4}(5-\pi)$

D) $\frac{a^2}{8}(6-\pi)$ E) $\frac{a^2}{2}(4+\pi)$

8 Un segmento de recta cuya longitud es ℓ se divide en dos partes. Sobre estas se construyen dos triángulos equiláteros. Si el área de uno de uno de ellos es la cuarta parte del área del otro, halla la longitud del lado del triángulo de menor área.

UNMSM 2009-II

A) $\ell/4$ B) $\ell/3$ C) $2\ell/3$

D) $\ell\sqrt{3}/2$ E) $\ell\sqrt{2}/4$

9 El perímetro de un triángulo rectángulo es "P" y uno de sus ángulos es 60°. El valor de la hipotenusa es:

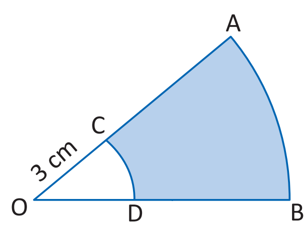
A) $(\sqrt{3}-1)P$ B) $(2+\sqrt{3})P$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}P$ D) $\frac{(3+\sqrt{3})}{2}P$

E) $\frac{(3-\sqrt{3})}{3}P$

10 En la figura, AOB y COD son sectores circulares. Si el área del sector circular COD es 9 cm^2 y la longitud del arco AB es 10 cm, halla el área de la región sombreada.

UNMSM 2008-II

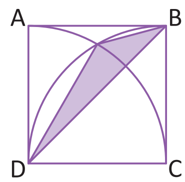


A) 16 cm^2 B) 20 cm^2 C) 25 cm^2

D) 24 cm^2 E) 12 cm^2

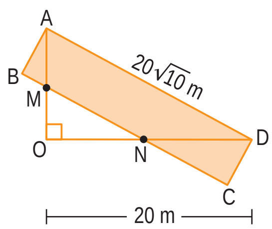
NIVEL 2

11. El área de la región cuadrada ABCD es 4 cm^2, calcula el área de la región sombreada.



A) $(\sqrt{3} + 1)\ cm^2$ B) $(\sqrt{3} - 1)\ cm^2$
C) $(\sqrt{2} + 1)\ cm^2$ D) $(\sqrt{3} + 2)\ cm^2$
E) $(\sqrt{6} - 1)\ cm^2$

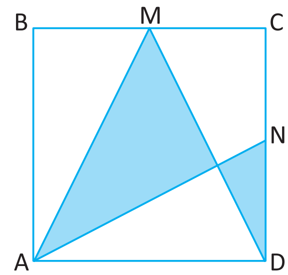
12. Calcula el área de la región rectángular ABCD, sabiendo que M y N son puntos medios de los lados del triángulo AOD.



A) 400 m^2 B) 560 m^2 C) 600 m^2
D) 680 m^2 E) 720 m^2

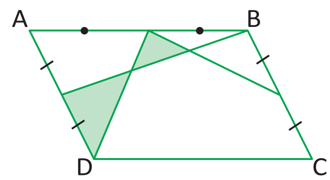
13. En la figura, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$, respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado ABCD es el área de la región sombreada?

UNMSM 2008-II



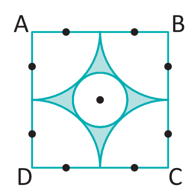
A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{7}{10}$ C) $\frac{7}{20}$
D) $\frac{9}{20}$ E) $\frac{5}{21}$

14. Calcula el área de la región sombreada, si el área del paralelogramo ABCD es 240 m^2.



A) 10 m^2 B) 20 m^2 C) 25 m^2
D) 30 m^2 E) 36 m^2

15. El lado del cuadrado ABCD es 2a metros. Calcula el área de la región sombreada.



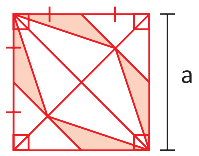
A) $a^2(2 + 2\pi - \pi\sqrt{2})\ m^2$ B) $2a^2(2 - 2\pi + \pi\sqrt{2})\ m^2$
C) $3a^2(1 + \pi + \pi\sqrt{2})\ m^2$ D) $2a^2(1 - 2\pi + \pi\sqrt{2})\ m^2$
E) $2a^2(2 + \pi - \pi\sqrt{2})\ m^2$

16) El área de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, es 32 u^2. Exteriormente se dibujan los triángulos equiláteros AEB y BFC. Si el área de la región triangular EBF es k veces el área de la región triangular ABC, calcula el valor de k.

UNI 2008-II

A) 5/6 B) 4/5 C) 3/4
D) 2/3 E) 1/2

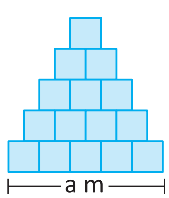
17) Halla el área de la región sombreada.



A) $\frac{a^2}{3}$ B) $\frac{a^2}{4}$ C) $\frac{a^2}{5}$

D) $\frac{a^2}{2}$ E) $\frac{a^2}{8}$

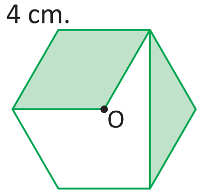
18) Se forma un cuadrado con todos los cuadraditos iguales que se presentan en la figura mostrada. Determina el lado del cuadrado formado.



A) $\frac{a}{5}\sqrt{15}$ m B) $\frac{a}{3}\sqrt{15}$ m C) $\frac{a}{4}\sqrt{15}$ m

D) $\frac{a}{2}\sqrt{10}$ m E) $\frac{a}{3}\sqrt{10}$ m

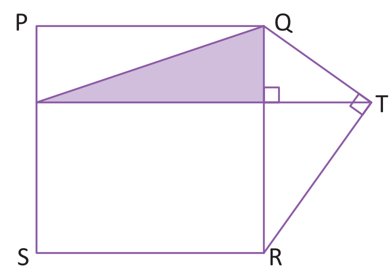
19) En el hexágono regular, calcula el área de la región no sombreada, sabiendo que O es centro y el lado del hexágono es 4 cm.



A) $10\sqrt{3}$ cm^2 B) $12\sqrt{3}$ cm^2
C) $14\sqrt{3}$ cm^2 D) $15\sqrt{3}$ cm^2
E) $10\sqrt{3}$ cm^2

20) En la figura, PQRS es un cuadrado y QT = 6 cm. Halla el área del triángulo sombreado.

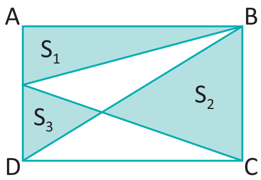
UNMSM 2008-II



A) 24 cm^2 B) 12 cm^2 C) 15 cm^2
D) 18 cm^2 E) 21 cm^2

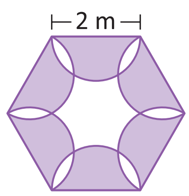
NIVEL 3

(21) La figura ABCD es un rectángulo donde $S_1 = 12\ m^2$, $S_2 = 21\ m^2$; luego, se pide calcula S_3.



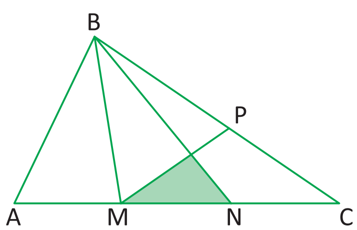
A) $6\ m^2$ B) $8\ m^2$ C) $9\ m^2$
D) $10\ m^2$ E) $12\ m^2$

(22) Calcula el área de la región sombreada, sabiendo que los lados del hexágono regular son diámetros.



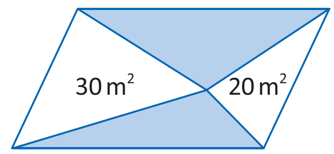
A) $(2\sqrt{3} + \pi)\ m^2$ B) $(3\sqrt{3} - 2\pi)\ m^2$
C) $(5\sqrt{3} - \pi)\ m^2$ D) $(6\sqrt{3} - \pi)\ m^2$
E) $(6\sqrt{3} - 2\pi)\ m^2$

(23) En la figura, AM = MN = NC y $\frac{BP}{PC} = \frac{5}{3}$. Si el área de la región sombreada es $8\ cm^2$, calcula el área de la región triangular ABC.



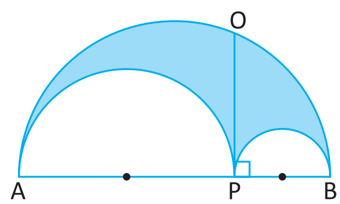
A) $104\ cm^2$ B) $120\ cm^2$ C) $80\ cm^2$
D) $96\ cm^2$ E) $64\ cm^2$

(24) En el siguiente paralelogramo, calcula el área de la región sombreada.



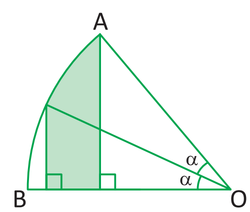
A) $25\ m^2$ B) $30\ m^2$ C) $50\ m^2$ D) $60\ m^2$ E) $70 m^2$

(25) Calcula el área de la región sombreada, sabiendo que $\overline{OP}$ mide 4 m y las figuras son semicírculos.



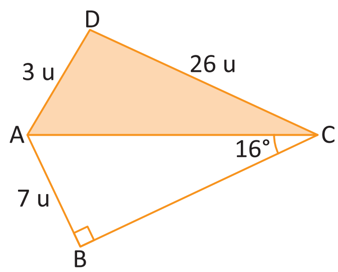
A) $2\pi\ m^2$ B) $3\pi\ m^2$ C) $4\pi\ m^2$
D) $2\sqrt{2}\,\pi\ m^2$ E) $2\sqrt{3}\,\pi\ m^2$

(26) Sabiendo que $AO = OB = 2\sqrt{3}$ m, y que $2\alpha = 60°$. Calcula el área de la región sombreada.



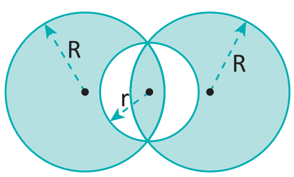
A) $(\pi + 2)\ m^2$ B) $\left(\pi + \sqrt{3}\right)\ m^2$
C) $\left(2\pi - \sqrt{3}\right)\ m^2$ D) $\pi\ m^2$
E) $\pi/2\ m^2$

27. Halla el área de la región sombreada.



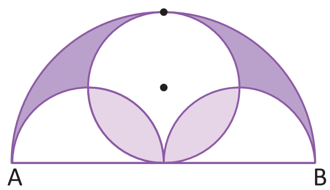
A) 25 u^2 B) 24 u^2 C) 20 u^2
D) 15 u^2 E) 36 u^2

28. Halla el área de la región sombreada.



A) $\pi(R^2 - r^2)$ B) $\pi(2R^2 - r^2)$
C) $\pi(R^2 - 2r^2)$ D) $\pi(R^2 - 3r^2)$
E) $\pi(R^2 - 4r^2)$

29. Calcula el área de la región sombreada, sabiendo que $\overline{AB}$ es diámetro y es igual a 6 m.



A) $\frac{9}{4}(\pi + 2)$ m^2 B) $\frac{9}{4}(\pi - 2)$ m^2
C) $\frac{9}{2}(\pi + 2)$ m^2 D) $\frac{9}{2}(\pi - 2)$ m^2
E) $\frac{3}{2}(\pi - 2)$ m^2

30. Sea ABCD un cuadrado y AEF un triángulo equilátero inscrito en ABCD. Halla el área del cuadrado ABCD, sabiendo que el área del triángulo AEF es $\sqrt{3}$.

A) 2 B) $2 + \sqrt{3}$ C) 3
D) $3 + \sqrt{3}$ E) 4

Claves

NIVEL 1		NIVEL 2	NIVEL 3	
1. C	9. E	11. B	17. B	25. C
2. D	10. A	12. C	18. A	26. D
3. E		13. C	19. B	27. E
4. C		14. D	20. D	28. B
5. E		15. B	21. C	29. D
6. B		16. E	22. D	30. B
7. B			23. A	
8. B			24. C	

Análisis combinatorio

Importante

Los factoriales solo están definidos para cantidades enteras y positivas.

Ejemplos:

(–3)! no existe

$\sqrt{5}$! no existe

0,2! no existe

$\frac{6}{7}$! no existe



FACTORIAL DE UN NÚMERO

Se define el factorial de un número n (n es un número entero y positivo), como el producto indicado de los números enteros y consecutivos desde la unidad hasta n inclusive. El cual se denota así: n! o $\underline{|n}$

Se lee: factorial de n o n factorial

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-2) \times (n-1) \times n;\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo:

- $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
- $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$
- $8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40\,320$

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

Principio de adición

Si un primer evento puede realizarse de m formas mientras que un segundo evento puede realizarse de n formas y no es posible realizar ambos eventos de manera simultánea, entonces para llevar a cabo cualquiera de ellos pueden utilizarse cualquiera de las (m + n) formas.

Ejemplo:
Un estudiante desea comprar su libro INTELECTUM, el cual se vende solo en 3 distritos: en Breña en 5 librerías, en cercado en 7 librerías y en Lince en 9 librerías.

¿De cuántas maneras podrá adquirir dicho libro?

Resolución:
Por el principio de adición:

n.° de maneras = 5 + 7 + 9 = 21



Importante

El estudio del análisis combinatorio tiene sus inicios en los periodos remotos de diversas culturas. Tal es el caso del famoso libro chino I-*Ching* ("Libro de las transformaciones") el cual nos proporciona, con sus combinacaones de trigamas místicos, uno de los ejemplos más antiguos. Según algunos historiadores, el I-*Ching* pudo haberse inspirado en un libro sobre variaciones, que en la actualidad se encuentra perdido, escrito en Japón, en el siglo XII de nuestra era.

Principio de multiplicación

Si un evento se puede descomponer en 2 eventos sucesivos y si existen m formas posibles de realizar el primer evento y si para cada una de estas existen n formas posibles para el segundo evento, entonces el procedimiento total se puede realizar (en el orden dado) de m × n formas.

Ejemplo:
Paolín va a una juguería para desayunar, como siempre un sándwich y una bebida.
Los sándwich son de pollo, huevo y palta.
Las bebidas que hay son: café, té; anís y manzanilla. ¿Cuántas opciones tiene Paolín para elegir su desayuno?

Resolución:
Para elegir un sándwich tiene 3 opciones.
Para elegir una bebida tiene 4 opciones.
Entonces, por el principio de multiplicación.

n.° de maneras = 3 × 4 = 12

PERMUTACIONES

Son los diferentes ordenamientos que se obtienen con n elementos tomados de k en k. Tenemos 3 tipos de permutaciones.

Permutación lineal

- Si de n elementos se ordenan k elementos:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, \; 0 < k < n$$

Permutación de n elementos tomados de k en k.

- Si de n elementos se ordenan n elementos:

$$P_n = n!$$

Permutación de n elementos.

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden exhibir 7 juguetes diferentes, si el estante solo tiene 3 lugares disponibles?

   Resolución:
   Se trata de una permutación de 7 elementos tomados de 3 en 3.

   $$P_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

2. ¿De cuántas maneras es posible ubicar a 8 estudiantes en una carpeta de 8 asientos?

   Resolución:
   Se trata de una permutación de 8 elementos.

   $$P_8 = 8! = 40\ 320$$

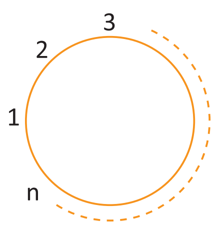
Observación

En toda permutación, la característica principal es el orden de sus elementos.



Permutación circular

Se llama permutación circular cuando los elementos se ordenan formando una línea cerrada o cuando se ordenan alrededor de un objeto.



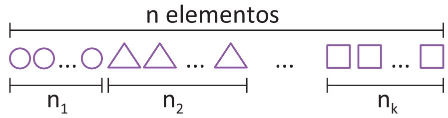
$$PC_n = (n-1)!$$

Ejemplos:
¿De cuántas maneras se pueden ubicar los 10 socios de un club deportivo alrededor de una mesa circular?

Resolución:
Se trata de una permutación circular de 10 elementos:
$PC_{10} = (10 - 1)! = 9! = 362\ 880$

Permutación con elementos repetidos

Se van a ordenar n elementos, de los cuales algunos se repiten.



Donde:
n : n.° total de elementos
$n_1; n_2; n_3; ..., n_k$: n.° de elementos repetidos
$n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_k \leq n$

$$P^{n}_{n_1; n_2; ...; n_k} = \frac{n!}{n_1!.n_2!. ...n_k!}$$

Atención

Las permutaciones y combinaciones, además de estar conceptualmente vinculadas, estas se relacionan mediante la fórmula:

$$P^n_k = C^n_k \times P_k$$



Ejemplo:

¿De cuántas formas se pueden ordenar los siguientes ramos de flores de diversos colores para su exhibición: 2 ramos de violetas, 3 ramos de gladiolos y 2 ramos de claveles?

Resolución:

Se trata de una permutación con elementos repetidos, donde:

$n = 7; n_1 = 2; n_2 = 3$ y $n_3 = 2$

Reemplazando:

$$P^7_{2;3;2} = \frac{7!}{2! \times 3! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 1 \times 3! \times 2 \times 1} = 210$$

COMBINACIONES

Son los diferentes agrupamientos que se obtienen con n elementos tomados de k en k. En una combinación no importa el orden como se tomen los elementos.

De n elementos se agrupan k de ellos:

$$C^n_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad 0 < k < n$$

Combinación de n elementos tomados de k en k

Observación

- $C^n_k = C^n_{n-k}$
- $C^n_k = \frac{n}{k} C^{n-1}_{k-1}$
- $C^n_k + C^n_{k+1} = C^{n+1}_{k+1}$
- $C^n_k = \frac{n-k+1}{k} C^n_{k-1}$
- $C^n_0 + C^n_1 + C^n_3 + ... + C^n_n = 2^n$



Ejemplo:

Marco se encuentra con Gina 3 veces a la semana. ¿De cuántas maneras podrá escoger los días para verla?

Resolución:

Como la semana tiene 7 días, de los cuales tiene que escoger 3 de ellos, se trata de una combinación de 7 elementos tomados de 3 en 3.

$$C^7_3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

Propiedades

- $C^n_1 = n$
- $C^n_0 = 1$
- $C^n_n = 1$
- $C^n_{n-1} = n$

Problemas resueltos

1 Si en una reunión se observaron 45 apretones de mano, ¿cuántas personas habían en dicha reunión?

Resolución:

Como el apretón de manos o intercambio de saludos se da sin importar el orden y además entre 2 personas, entonces se trata de una combinación.

Sea n el numero de personas.

$C_2^n = 45$

$\frac{n(n-1)}{2!} = 45$

$n(n-1) = 90$

$n(n-1) = 9 \times 10$

$\Rightarrow n = 10$

Por lo tanto, a la reunión asistieron 10 personas.

2 ¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en el campeonato descentralizado de fútbol en una rueda, en la que participan 16 equipos?

Resolución:

Se trata de una combinación ya que el orden no interesa.
Cada partido se juega de 2 en 2, luego el número de combinaciones será:

$C_2^{16} = \frac{16 \,.\, 15}{2!} = 120$

3 ¿Cuántos números mayores de 5000 se podrán formar con las cifras 2; 5; 1 y 4?

Resolución:

a	b	c	d
5	2	2	2
	5	5	5
	1	1	1
	4	4	4

$1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$

4 ¿Cuántas palabras diferentes pueden formarse con todas las letras de la palabra TERCERO?

Resolución:

Importa el orden.

1 letra T
2 letras E
2 letras R
1 letra C
1 letra O

} 7 letras

$\Rightarrow P^7_{1;2;2;1;1} = \frac{7!}{1!\,.\,2!\,.\,2!\,.\,1!\,.\,1!}$

$P^7_{1;2;2;1;1} = \frac{7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2!}{2!.2!}$

$P^7_{1;\,2;\,2;\,1;\,1} = 1260$

5 Se quiere sentar cinco hombres y cuatro mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?

Resolución:

1	3	5	7	9
☐	☐	☐	☐	☐

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

4 asientos pares:

2	4	6	8
☐	☐	☐	☐

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Luego: $120 \times 24 = 2880$

Se pueden sentar de 2880 maneras.

6 Una clase consta de 9 niños y 3 niñas. ¿De cuántas maneras el profesor formará un comité de 4 alumnos?

Resolución:

Como no se toma en cuenta el orden, se trata de una combinación.

$C_4^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4!}$

$C_4^{12} = 495$

Podrá formar el comité de 495 maneras distintas.

7 Halla el número de permutaciones que se pueden formar con todas las letras de la palabra IMPROPIO.

Resolución:

Como hay letras que se repiten, se trata de una permutación con repetición.

Total de letras: 8

Total de letras P: 2

Total de letras O: 2

Total de letras I: 2

Total de letras M: 1

Total de letras R: 1

$$P^{8}_{2;\,2;\,2;\,1;\,1} = \frac{8!}{2!2!2!1!1!}$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{8}$$

$$P^{8}_{2;\,2;\,2;\,1;\,1} = 5040$$

∴ El número de permutaciones es 5040.

8 Con 7 varones y 5 mujeres se van a formar comités mixtos de 6 personas. ¿De cuántas maneras se pueden formar, si en cada comité hay 2 mujeres?

Resolución:

Sin contar a las dos mujeres se formarán grupos de 4 personas con los hombres, y se formarán grupos de 2 mujeres, entonces:

$$C^7_4 \times C^5_2 = \frac{7!}{4!\times(7-4)!}\times\frac{5!}{2!(5-2)!}$$

$$C^7_4 \times C^5_2 = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3!}\times\frac{5\times4\times3!}{2!\times3!}$$

$$C^7_4 \times C^5_2 = 35\times10 = 350$$

∴ Se pueden formar 350 comites mixtos.

9 ¿Cuántos comités de 4 personas se pueden formar con un grupo de 12 personas, de tal manera que la comisión tenga un presidente, un secretario, un tesorero y un vocal?

Resolución:

Se trata de una permutación de 12 elementos tomados de 4 en 4.

$$P^{12}_4 = \frac{12!}{(12-4!)} = \frac{12!}{8!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8!}{8!}$$

$$P^{12}_4 = 11880$$

∴ Se pueden formar 11880 comites.

10 Si sobre una mesa se encuentran 12 bolas, de las cuales 6 son blancas, 4 son negras y las restantes de color rojo. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar dichas bolas en fila?

Resolución:

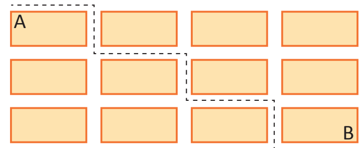
Se trata de una permutación con repetición de 12 elementos con 6; 4 y 2 elementos repetidos:

$$P^{12}_{6;4;2} = \frac{12!}{6!4!2!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7\times6!}{6!\times4\times3\times2\times1\times2\times1}$$

$$= 13\,860$$

∴ Se pueden colocar de 13 860 maneras diferentes.

11 La línea punteada indica el camino a seguir, para llegar a B desde A, a través de las veredas. ¿Cuántos caminos diferentes, pero de igual longitud podemos recorrer para desplazarnos entre los puntos mencionados?



Resolución:

Se observa que a partir de A hasta B hay que recorrer 7 cuadras: 4 horizontales (H) y 3 verticales (V), las posibilidades serán:

{HVHVHVH, HHHHVVV, VHVHVHH, ...}

Luego el problema consistiría en permutar 4H y 3V, lo cual es una permutación con repetición.

Número de caminos diferentes: $P^{7}_{4;3} = \dfrac{7!}{4!\times3!} = 35$

Actividades de razonamiento

1. Halla x, en:

$(x + 4)(x + 3)(x + 2)! = 5040$

A) 1 B) 4 C) 2 D) 5 E) 3

2. Reduce:

$$R = \frac{\lfloor 359}{\lfloor 358} + \frac{\lfloor 2010}{\lfloor 2009} + \frac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$$

A) 359 B) 2010 C) 240 D) 2372 E) 120

3. Suma:

$$L = \frac{\lfloor 7 - \lfloor 6}{\lfloor 5} + \frac{\lfloor 6 - \lfloor 5}{\lfloor 4} + \frac{\lfloor 5 - \lfloor 4}{\lfloor 3} + \dots + \frac{\lfloor 2 - \lfloor 1}{\lfloor 0}$$

A) 64 B) 49 C) 7 D) 81 E) 91

4. Si: $120 \,.\, (120)^{24!} = (5!)^{(4!)!} \,.\, (5 + x)!$

Calcula: $(x + 2)!$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5. Con cuatro personas, ¿cuántos grupos de 3 personas se pueden formar?

A) 4 B) 6 C) 8 D) 5 E) 7

6. María tiene 4 blusas y 6 faldas, todas de diferentes colores. ¿De cuántas maneras puede vestirse, si la blusa roja siempre la usa con una falda morada y viceversa?

A) 16 B) 24 C) 18 D) 17 E) 19

7. ¿Cuántas ensaladas, con 4 frutas, podemos hacer si disponemos de 10 frutas diferentes?

A) 210 B) 40 C) 180 D) 150 E) 145

8. Álvaro tiene 8 billetes de valores diferentes. ¿Cuántas sumas de dinero distintas se pueden formar tomando los billetes de 3 en 3?

A) 32 B) 56 C) 72 D) 42 E) 24

9. ¿Cuántas señales se pueden hacer con 5 banderolas diferentes, si en cada señal deben haber 2 banderolas?

A) 30 B) 20 C) 15 D) 60 E) 25

10. Una melodía musical debe estar formada por 5 notas diferentes. ¿Cuántas melodías se pueden componer?

A) 48 B) 120 C) 72 D) 36 E) 130

11. Con las cifras 1; 4; 6 y 7, ¿cuántos números de 1; 2 y 3 cifras diferentes puedo formar en total?

A) 14 B) 16 C) 40 D) 15 E) 17

12. En un campeonato de fútbol participan 16 equipos. ¿De cuántas maneras ocuparán los 5 primeros puestos, sabiendo que Cienciano saldrá siempre campeón?

A) 32 760 B) 12 400 C) 10 015
D) 97 500 E) 10 840

13. Halla el total de combinaciones que se pueden hacer con 5 letras tomadas en primer lugar de 2 en 2, luego de 3 en 3 y después de 4 en 4.

A) 25 B) 84 C) 70 D) 36 E) 120

14. Un club tiene 15 miembros, 10 hombres y 5 mujeres. ¿Cuántos comités de 8 miembros se pueden formar, si cada comité debe estar integrado por 3 mujeres?

A) 3423 B) 5150 C) 2520 D) 8155 E) 1680

Claves

1. E	5. A	9. B	13. A
2. D	6. A	10. B	14. C
3. E	7. A	11. C	
4. C	8. B	12. A	

Reto



Halla a + b, si:

$720^{a!(a+1)} = [(b!)!]^{120}$

Rpta.: 7

Refuerza practicando

NIVEL 1

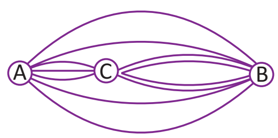
1. Una persona desea viajar de Lima a Piura; para ello dispone de ocho líneas aéreas, seis líneas terrestres y cuatro rutas marítimas. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el viaje, si puede utilizar solo una de las rutas?

   A) 16 B) 17 C) 18 D) 32 E) 192

2. Un alumno tiene seis pantalones, cuatro camisas y tres pares de zapatos, todos ellos de distinto color. ¿De cuántas maneras diferentes se podría vestir usando estas prendas?

   A) 13 B) 60 C) 82 D) 72 E) 54

3. ¿Por cuántas rutas diferentes se puede ir de A a B?



   A) 12 B) 14 C) 16 D) 20 E) 24

4. ¿Cuántos números enteros y diferentes mayores que 10 y menores que 100, se pueden formar con las ocho primeras cifras (1; 2; ...; 8), siendo el número, de cifras diferentes?

   A) 34 B) 56 C) 48 D) 64 E) 32

5. En una evaluación debo contestar seis de ocho preguntas planteadas. ¿De cuántas maneras diferentes podré elegir las seis preguntas?

   A) 24 B) 56 C) 28 D) 20 160 E) 1200

6. En un concurso de belleza hay 10 hermosas participantes, ¿de cuántas maneras diferentes se puede elegir a los cuatro primeros lugares?

   A) 5040 B) 210 C) 620 D) 720 E) 1080

7. ¿Cuántas palabras diferentes sin importar su sentido, se pueden formar intercambiando de lugar las letras de la palabra PROBLEMA?

   A) 720 B) 8! C) 7! D) 4! . 5! E) 360

8. Con siete banderas de diferentes colores, ¿cuántas señales distintas de tres banderas se pueden hacer?



   A) 120 B) 170 C) 196 D) 200 E) 210

9. ¿Cuántos ordenamientos diferentes pueden obtenerse con las letras de la palabra CREMA?

   A) 70 B) 120 C) 24 D) 48 E) 240

10. ¿Cuántos sonidos diferentes pueden producirse con seis teclas de un piano, si se tocan tres de ellas simultáneamente?

   A) 10 B) 20 C) 30 D) 120 E) 60

NIVEL 2

11. ¿De cuántas maneras pueden ubicarse cinco personas en una fila de cinco asientos?

A) 5 B) 20 C) 30 D) 120 E) 720

12. Diez invitados se han dividido en dos grupos de cinco para ocupar dos mesas. ¿De cuántas maneras puede repartirse a los invitados en dichos grupos?

A) 80 B) 120 C) 156 D) 190 E) 252

13. ¿Cuántas ensaladas que contienen exactamente tres frutas podemos preparar si disponemos de 6 frutas?

A) 10 B) 15 C) 20 D) 24 E) 48

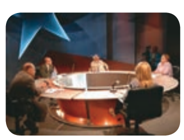
14. Con las cifras: 1; 2; 3; 4; 5 y 7; ¿cuántos números de cuatro cifras diferentes se podrán formar?

A) 15 B) 90 C) 180 D) 360 E) 240

15. Cuatro personas entran en un vagón de ferrocarril en el que hay siete asientos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ubicarse?

A) 540 B) 680 C) 760 D) 570 E) 840

16. Se tienen 6 candidatos para ocupar los cargos de presidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá realizar la selección?



A) 20 B) 60 C) 120 D) 80 E) 240

17. Se deben seleccionar dos personas para ocupar los cargos de director y subdirector de un grupo de cinco personas igualmente capacitadas. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar dichos cargos?

A) 28 B) 20 C) 26 D) 30 E) 60

18. Cuatro personas abordan un automóvil en el que hay seis asientos. Si solo dos saben conducir, ¿de cuántas maneras diferentes pueden sentarse?

A) 24 B) 60 C) 120 D) 240 E) 360

19. ¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en total en un campeonato que se juega a dos ruedas? Suponer que participan 12 equipos.

A) 124 B) 160 C) 144 D) 120 E) 132

20. ¿De cuántas formas se podrán ubicar 5 personas en una fila de siete asientos, dejando los dos asientos libres, siempre juntos?

A) 120 B) 240 C) 600 D) 720 E) 840

NIVEL 3

21. En el campeonato de fútbol inglés participan 18 equipos. ¿Cuántos partidos se jugarán en un torneo? Los partidos son de ida y vuelta.

A) 153 B) 264 C) 324 D) 306 E) 284

22. Se tienen 12 puntos coplanares, no situados tres de ellos en línea recta. ¿De cuántas maneras pueden formarse triángulos teniendo a un punto determinado como vértice?

A) 55 B) 45 C) 110 D) 220 E) 80

23. ¿Cuántos ordenamientos diferentes pueden obtenerse con las letras de la palabra BLANQUIAZUL?

A) $\frac{11!}{2}$ B) $\frac{11!}{12}$ C) $\frac{11!}{8}$ D) $\frac{10!}{5}$ E) $\frac{12!}{5}$

24. Alrededor de una mesa circular de siete asientos se ubican 2 chicas y 4 chicos, ¿de cuántas maneras podrán hacerlo, si el asiento vacío debe quedar entre las dos chicas?



A) 16 B) 48 C) 60 D) 96 E) 144

25. Un equipo de vóley se sienta a dialogar en una mesa circular. ¿De cuántas formas se pueden sentar sus integrantes, si tres de ellos siempre deben estar juntos?

A) 22 B) 24 C) 12 D) 36 E) 6

26. ¿De cuántas maneras diferentes puede ser contestado un formulario de 10 preguntas, si cada una se contesta con un sí o un no?

A) 512 B) 680 C) 1024 D) 720 E) 256

27. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden repartir cuatro premios distintos a tres personas, si cada uno debe recibir por lo menos un premio?

A) 36 B) 35 C) 60 D) 12 E) 43

28. ¿De cuántas maneras se pueden hacer señales con 5 banderas de colores diferentes?

A) 120 B) 240 C) 300 D) 325 E) 360

29. Una persona dispone de ocho fichas, cada una de ellas con un número del 1 al 8. ¿De cuántas maneras diferentes se podrá tomar cuatro de ellas y lograr que la suma de ellas sea un número par?

A) 36 B) 28 C) 38 D) 37 E) 18

30. A un trabajo se presentan cinco ingenieros y cuatro arquitectos. ¿De cuántas maneras se podrá hacer la elección de dos ingenieros y dos arquitectos?

A) 90 B) 60 C) 30 D) 120 E) 45

Claves

NIVEL 1
1. C
2. D
3. C
4. B
5. C
6. A
7. B
8. E
9. B
10. D

NIVEL 2
11. D
12. E
13. C
14. D
15. E
16. C
17. B
18. C
19. E
20. D

NIVEL 3
21. D
22. A
23. C
24. B
25. D
26. C
27. A
28. D
29. C
30. B

Probabilidades

Importante

Todo subconjunto del espacio muestral que presenta un solo elemento se denomina evento o suceso elemental.



EXPERIMENTO ALEATORIO (E)

Es aquel fenómeno que bajo las mismas condiciones experimentales se presenta en más de una manera.

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

EVENTO O SUCESO

Un evento o suceso es cualquier subconjunto de un espacio muestral. Se denotan con las letras mayúsculas del alfabeto.

- Suceso imposible: si el suceso A resulta ser un conjunto vacío ($A = \varnothing$), entonces es un suceso imposible.
- Suceso seguro: si el suceso A es igual al espacio muestrtal ($A = \Omega$), entonces es un suceso seguro.

Ejemplo:
Al lanzar un dado se observan los siguientes sucesos:

- A: obtener un número par.
  $A = \{2; 4; 6\}$
- B: obtener un número impar.
  $B = \{1; 3; 5\}$
- C: obtener un número mayor que 6.
  $C = \{7; 8; 9; ...\} \Rightarrow$ C es un suceso imposible
- D: obtener un número mayor que 0.
  $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow$ D es un suceso seguro.

Importante

Dado un suceso A, se llama suceso contrario de A, al complemento del suceso respecto al espacio muestral y se denota: A' o A^c



SUCESOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Dados los sucesos A y B, se dice que son mutuamente excluyentes si y solo si $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo:
De los pacientes atendidos en una clínica, se tienen los siguientes sucesos:

- A: se han atendido a menos de 16 personas.
  $A = \{1; 2; 3; ...; 15\}$
- B: se han atendido exactamente 18 personas
  $B = \{18\}$
- C: se han atendido a más de 12 personas.
  $C = \{13; 14; 15; ...\}$

Entonces:
A y B son sucesos mutuamente excluyentes: $A \cap B = \varnothing$
B y C son sucesos no excluyentes: $B \cap C = \{18\}$
A y C son sucesos no excluyentes: $A \cap C = \{13; 14; 15\}$

SUCESOS INDEPENDIENTES

Dados dos sucesos A y B, se dice que ellos son independientes si la ocurrencia de A no afecta el hecho de que ocurra simultáneamente o sucesivamente B.

Observación

Dos eventos o sucesos A y B son independientes si: $P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$



DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

Si A es un suceso de un espacio muestral Ω, entonces la probabilidad de ocurrencia de A se denota por P(A) y está dada por:

$$P(A) = \frac{\text{n.° de casos favorables del suceso A}}{\text{n.° total de casos en } \Omega}$$

Ejemplo:
Una caja contiene 11 lapiceros azules, 7 lapiceros rojos y 5 lapiceros negros; si se extrae al azar uno de ellos, determina la probabilidad de que el lapicero extraído no sea de color azul.

Resolución:
A: el lapicero extraído no sea azul

$$P(A) = \frac{\text{n.° de lapiceros que no son azules}}{\text{n.° total de lapiceros}}$$

$$= \frac{7+5}{11+7+5} = \frac{12}{23}$$

Recuerda

Lanzar una moneda dos veces es equivalente a lanzar dos monedas una sola vez. En general, si una moneda se lanza n veces, entonces el espacio muestral tendrá 2^n sucesos elementales.



Propiedades

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- Para dos sucesos cualesquiera A y B se tiene que:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si dos sucesos A y B son mutuamente excluyentes se tiene que:
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PROBABILIDAD CONDICIONAL

Es la probabilidad de ocurrencia de B, dado que ya ocurrió A y se denota por P(B/A) y se calcula así:

$$P[B/A] = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; P(A) > 0$$

Ejemplo:
En una caja se tienen bolas numeradas del 1 al 9; si se extrae una bola al azar, determina la probabilidad de que la bola extraída sea mayor que 6 dado que fue impar.

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\} \Rightarrow n(\Omega) = 9$

B: sea mayor que 6 $\Rightarrow B = \{7; 8; 9\}$

A: sea impar $\Rightarrow A = \{1; 3; 5; 7; 9\} \Rightarrow n(A) = 5$

$A \cap B$: sea impar y mayor que 6 $\Rightarrow A \cap B = \{7; 9\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$$P[B/A] = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/9}{5/9} = \frac{2}{5}$$

Nota

- Para un suceso seguro la probabilidad será 1: $P(\Omega) = 1$
- Para un suceso imposible la probabilidad será 0: $P(\phi) = 0$

Problemas resueltos

1 En una caja hay 24 fichas numeradas del 1 al 24, todas del mismo tamaño y forma. Si se extrae una ficha al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esta sea múltiplo de 6 ó 7?

Resolución:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; ...; 24\} \Rightarrow n(\Omega) = 24$

A: la ficha tiene un múltiplo de 6 ó 7.

$A = \{6; 7; 12; 14; 18; 21; 24\} \Rightarrow n(A) = 7$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{7}{24}$

2 Se escribe al azar un número de dos cifras, ¿cuál es la probabilidad de que dicho número escrito sea múltiplo de 5?

Resolución:

ε: escribir un número de dos cifras.

A: el número es múltiplo de 5.

$A = \{10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95\}$

$\Rightarrow n(A) = 18 \wedge n(\Omega) = 99 - 10 + 1 = 90$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{18}{90} = \dfrac{1}{5}$

3 Se extrae una carta de una baraja normal. Calcula la probabilidad de obtener un 2 o un 5.

Resolución:

ε: se extrae una carta.

A: obtener un 2 $\Rightarrow n(A) = 4$

B: obtener un 5 $\Rightarrow n(B) = 4$

Sabemos: $n(\Omega) = 52$

Como A y B son sucesos mutuamente excluyentes:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} + \dfrac{n(B)}{n(\Omega)}$

$\therefore P(A \cup B) = \dfrac{4}{52} + \dfrac{4}{52} = \dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$

4 Se extrae un bolo de un total de 12 (los bolos están numerados del 1 al 12). ¿Cuál es la probabilidad que dicho bolo sea múltiplo de 4, si se sabe que fue par?

Resolución:

A: el bolo tiene un múltiplo de 4.

B: el bolo es par.

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

$\Rightarrow n(\Omega) = 12$

$A \cap B = \{4; 8; 12\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

$B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$\Rightarrow P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

5 Tres cazadores disparan contra una liebre. Las probabilidades de que peguen en el blanco son respectivamente $\frac{3}{5}$; $\frac{3}{10}$ y $\frac{1}{10}$. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos uno de los tres cazadores dé en el blanco?

Resolución:

Sean los cazadores A, B y C y las probabilidades de que acierte cada uno:

$P(A) = \dfrac{3}{5}$; $P(B) = \dfrac{3}{10}$ y $P(C) = \dfrac{1}{10}$

Sea el suceso:

M: que al menos uno de los cazadores acierte.

$\Rightarrow$ M': que ninguno acierte.

$P(M') = P(A') . P(B') . P(C') = \dfrac{2}{5} . \dfrac{7}{10} . \dfrac{9}{10} = \dfrac{63}{250}$

$\Rightarrow P(M) = 1 - P(M') = 1 - \dfrac{63}{250} = \dfrac{250 - 63}{250}$

$\therefore P(M) = \dfrac{187}{250}$

6 ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga el número 3 y el 4 en dos lanzamientos sucesivos de un dado?

Resolución:

A: obtener 3 $\Rightarrow A = \{3\} \wedge n(A) = 1$

B: obtener 4 $\Rightarrow B = \{4\} \wedge n(B) = 1$

Luego:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6} \wedge P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Como A y B son sucesos independientes:

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

7 La probabilidad de que mañana llueva es 0,11; la probabilidad de que truene es 0,05 y la probabilidad de que llueva y truene es 0,04. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva o truene mañana?

Resolución:

A: que llueva $\Rightarrow P(A) = 0{,}11$

B: que truene $\Rightarrow P(B) = 0{,}05$

Además: $P(A \cap B) = 0{,}04$

Luego:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = 0{,}11 + 0{,}05 - 0{,}04$

$\therefore P(A \cup B) = 0{,}12$

8 La probabilidad de que Paolo ingrese a la UNAC es 0,3 y de que ingrese a la UNFV es 0,7. Si la probabilidad de que ingrese al menos a una de estas universidades es 0,8; halla la probabilidad de que ingrese a las dos universidades mencionadas.

Resolución:

Sean los eventos:

A: ingresa a la UNAC; B: ingresa a la UNFV

$P(A) = 0{,}3$; $P(B) = 0{,}7$; $P(A \cup B) = 0{,}8$

Piden: $P(A \cap B)$

Luego: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}8 = 0{,}3 + 0{,}7 - P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cap B) = 0{,}2$

9 Una caja contiene 30 bolas numeradas del 1 al 30. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola resulte par o múltiplo de 5?

Resolución:

El espacio muestral sería:

$\Omega = \{1; 2; 3; ... ; 30\}$

- A: salga par

  $A = \{2; 4; 6; ...; 30\} \Rightarrow n(A) = 15$

  $P(A) = \frac{15}{30}$
- B: salga multiplo de 5

  $B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\} \Rightarrow n(B) = 6$

  $P(B) = \frac{6}{30}$
- $A \cap B$: salga par y múltiplo de 5.

  $A \cap B = \{10; 20; 30\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3$

  $P(A \cap B) = \frac{3}{30}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{15}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{3}{5}$$

10 ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 caras en 4 tiros de una moneda y una suma igual a 11 en un tiro de dos dados?

Resolución:

ε_1: lanzar una moneda 4 veces

$\Omega_1 =$ {cccc; cccs; ccsc; ccss; cscc; cssc; cscs; cssss; ssss; sssc; scsc; sscc; sccc; sccs; scsc; scss} $\Rightarrow n(\Omega_1) = 16$

A: obtener exactamente 3 caras

A = {cccs; ccsc; cscc; sccc} $\Rightarrow n(A) = 4$

$P(A) = \frac{4}{16}$

ε_2: tirar 2 dados

$\Omega_2 =$ {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (6; 6)} $\Rightarrow n(\Omega_2) = 36$

B: obtener una suma igual a 11

B = {(5; 6), (6; 5)} $\Rightarrow n(B) = 2$

$P(B) = \frac{2}{36}$

Luego; piden: $\frac{4}{16} \times \frac{2}{36} = \frac{1}{72}$

Actividades de razonamiento

1. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 ó 4 al lanzar un dado?

A) 1/2 B) 1/5 C) 3/5
D) 1/3 E) 2/3

2. Se lanza un dado y una moneda simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número primo y un sello?

A) 1/5 B) 2/5 C) 1/3
D) 1/2 E) 1/4

3. 3 caballos A, B y C intervienen en una carrera, A tiene doble posibilidad de ganar que B y B el doble de ganar que C. ¿Cuál es la probabilidad de que gane C?

A) 1/3 B) 2/3 C) 3/4
D) 2/5 E) 1/4

4. Se lanzan 2 dados simultáneamente. Calcula cuántos elementos tiene el espacio muestral.

A) 64 B) 32 C) 36
D) 16 E) 40

5. Calcula la probabilidad de que al arrojar una moneda dos veces, aparezca aunque sea una vez sello.

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$
D) 1 E) $\frac{2}{3}$

6. En una caja se tienen 7 lapiceros rojos, 8 azules y 6 blancos. Si se extrae uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea rojo?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{8}{21}$ C) $\frac{2}{7}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{21}$

7. Tres tornillos y tres tuercas están en una caja. Si escogemos dos piezas al azar, halla la probabilidad de sacar un tornillo y una tuerca.

A) $\frac{2}{17}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $\frac{8}{17}$ E) $\frac{9}{15}$

8. Al lanzar tres monedas al aire, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 caras y 1 sello?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{5}{8}$
D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{8}$

9. En una carrera automovilística participan 3 peruanos, 3 bolivianos y 5 colombianos. Si todos tienen igual posibilidad de ganar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue primero un colombiano y segundo un peruano?

A) $\frac{2}{11}$ B) $\frac{3}{22}$ C) $\frac{3}{11}$
D) $\frac{4}{11}$ E) $\frac{8}{21}$

10. Si se lanzan 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener 10 puntos?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

11. Una familia tiene 7 hijos, de ellos 3 son mujeres. Para la cena se llamó a todos por igual. ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 primeros que lleguen sean hombres? (Todos gozan de las mismas condiciones).

A) $\frac{3}{12}$ B) $\frac{7}{24}$ C) $\frac{5}{24}$
D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{4}{35}$

12. Sobre el piso un niño ha dibujado un círculo, luego duplica el largo de la cuerda usada y usando el mismo centro dibuja otro círculo, después arroja una canica sobre los círculos dibujados. Calcula la probabilidad de que dicha canica caiga dentro del círculo mayor, pero no dentro del círculo pequeño.

A) 0,75 B) 0,25 C) 0,4
D) 0,5 E) 0,125

13. De los siguientes dígitos: 1; 2; 3; 4; ...; 9. Si tomo 2 de estos, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia positiva entre ellos sea 3?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{3}{10}$

14. Tres tornillos y tres tuercas están en una caja. Si escogemos dos piezas al azar, halla la probabilidad de sacar un tornillo y una tuerca.

A) $\frac{2}{17}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{7}$
D) $\frac{8}{17}$ E) $\frac{9}{15}$

Claves

1. D	5. C	9. B	13. A
2. E	6. A	10. B	14. E
3. A	7. A	11. E	
4. C	8. E	12. A	

Reto



Si la probabilidad de ganar una partida de ajedrez es P, ¿cuál será la probabilidad de ganar al menos una partida en 3 partidas de ajedrez?

Rpta.: $(1 - P)^3$

Refuerza practicando

NIVEL 1

1. Se lanzan dos dados al aire y se observan los puntos obtenidos. Halla la probabilidad de la suma de puntos sea igual a 7.

A) 4/5 B) 1/2 C) 1/6
D) 1/3 E) 1/5

2. Del problema 1, halla la probabilidad de que la suma de puntos sea un número par.

A) 1/3 B) 1/4 C) 3/5
D) 1/2 E) 2/3

3. Del problema 1, halla la probabilidad de que la suma de puntos sea múltiplo de tres.

A) 3/4 B) 1/2 C) 1/5
D) 1/6 E) 1/3

4. Halla la probabilidad de que al lanzar al aire dos monedas, salgan dos caras.

A) 1/4 B) 2/3 C) 1/6
D) 1/3 E) 1/5

5. Del problema 4, halla la probabilidad de que salgan dos sellos.

A) 2/3 B) 1/5 C) 1/2
D) 2/5 E) 1/3

6. Del problema 4, halla la probabilidad de que salga una cara y un sello.

A) 3/4 B) 1/5 C) 1/2
D) 1/6 E) 1/3

7. En un sobre hay 20 papeletas, ocho llevan dibujado un coche y las restantes son blancas. Halla la probabilidad de extraer una papeleta con el dibujo de un coche, si se saca una papeleta al azar.

A) 1/2 B) 4/5 C) 2/5
D) 2/3 E) 4/2

8. Del problema 7, halla la probabilidad de extraer al menos una papeleta con el dibujo de un coche, si se extraen dos papeletas al azar una tras otra.

A) 62/95 B) 63/90 C) 61/95
D) 60/93 E) 69/95

9. Juan rinde su práctica calificada y la calificación es de 0 a 20. ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga una nota impar menor que 14?

A) 2/3 B) 1/3 C) 4/21
D) 1/21 E) 3/7

10. Si se escoge un número de la sucesión: 1; 2; 3; 4; ...; 280. ¿Cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 4; 5 y 6?

A) 7/20 B) 9/20 C) 1/70
D) 11/200 E) 29/50

NIVEL 2

11. De una caja que contiene 4 esferas rojas, 3 azules y 2 verdes, se extrae al azar una de ellas. Halla la probabilidad de que la esfera extraída no sea azul.

A) 2/5 B) 3/4 C) 1/6
D) 2/3 E) 1/5

12. Si se lanza 5 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que salga un sello?

A) 1/8 B) 1/64 C) 1/32
D) 5/32 E) 1/16

13. Al lanzar 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de que el resultado del primer dado sea mayor que el resultado del segundo?

A) 5/12 B) 18/24 C) 17/36
D) 19/36 E) 7/9

14. En una caja hay una tarjeta roja, una verde y una negra. Sin mirar se saca una tarjeta y se devuelve a la caja, luego se saca otra tarjeta. ¿Cuál es la probabilidad de que en la primera y la segunda vez se saque una tarjeta verde?

A) 1/9 B) 1/3 C) 1/6
D) 1/12 E) 1/8

15. Se escribe al azar un número de dos cifras, ¿cuál es la probabilidad de que dicho número escrito sea múltiplo de 12?

A) 4/45 B) 1/90 C) 7/90
D) 7/9 E) 2/3

16. En una urna hay 7 esferas rojas, 3 negras y 4 azules. Si se extraen dos esferas una por una, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea roja y la segunda sea azul? (Experimento sin reposición).



A) 1/3 B) 2/13 C) 1/7
D) 1/18 E) 3/17

17. Si se lanza 5 veces un dado, ¿cuál es la probabilidad de que en los 5 lanzamientos se obtengan números diferentes?

A) 5/54 B) 3/59 C) 3/11
D) 4/11 E) 3/41

18. Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado. Calcula la probabilidad de obtener una cara y un número par.

A) 1/3 B) 1/4 C) 1/6
D) 2/3 E) 3/4

19. Tres hermanas van al cine con tres amigos. Si todos se sientan en una fila de 6 asientos, ¿cuál es la probabilidad de que las hermanas estén siempre juntas?

A) 1/36 B) 1/5 C) 1/24
D) 1/44 E) 1/30

20. María ha calculado que la probabilidad de que Juan la visite es $\frac{4}{5}$, de que Pedro la visite es $\frac{2}{3}$ y de que Alberto la visite es $\frac{3}{7}$. ¿Cuál es la probabilidad de que ese día se encuentren los 4 amigos? ¿Cuál es la probabilidad de que alguien la visite?

A) $\frac{8}{35}$; $\frac{4}{105}$ B) $\frac{8}{35}$; $\frac{101}{105}$ C) $\frac{8}{35}$; $\frac{27}{35}$
D) $\frac{3}{35}$; $\frac{12}{105}$ E) $\frac{3}{35}$; $\frac{32}{35}$

NIVEL 3

21. Un disco, que está dividido en sectores iguales de blancos y rojos alternadamente, comienza a girar con rapidez constante y se le arroja un dardo. Calcula la probabilidad de que el dardo caiga en un sector rojo (suponer que la probabilidad de que un dardo caiga sobre una superficie es proporcional al área de esta).

A) 1/4 B) 1/3 C) 1/5
D) 1/2 E) 1

22. Entre un ciento de fotos se encuentra una foto especial. Si se toma 10 de ellas al azar, calcula la probabilidad de encontrar entre ellas la foto buscada.

A) 0,2 B) 0,15 C) 0,1
D) 0,05 E) 0,01

23. Sobre una mesa hay 15 monedas con 7 caras y 8 sellos a la vista. Si se separan 8 monedas al azar, ¿cuál es la probabilidad que resulten 4 caras y 4 sellos?



A) $\frac{245}{1887}$ B) $\frac{490}{1887}$ C) $\frac{373}{1584}$
D) $\frac{490}{1287}$ E) $\frac{215}{1647}$

24. De una baraja de naipes (52 cartas) se extraen 2 cartas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sean una reina y un rey?

A) 2/13 B) 3/26 C) 8/663
D) 3/13 E) 1/12

25. Si se desea escoger entre 4 matemáticos y 5 químicos para formar un comité académico de 3 miembros, halla la probabilidad de seleccionar exactamente 2 químicos en tal comité.

A) 15/93 B) 10/21 C) 5/14
D) 4/7 E) 3/31

26. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 9 monedas se obtenga al menos 3 caras?

A) 32/255 B) 25/256 C) 233/256
D) 23/256 E) 45/256

27. En una bolsa se tiene 5 caramelos de fresa, 4 de limón y 2 de naranja. Si extraemos 3 caramelos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que entre los 3 que se han sacado exista uno de cada tipo?

A) 4/11 B) 4/33 C) 2/11
D) 8/11 E) 8/33

28. Se lanza un dado. Si el número es impar, ¿cuál es la probabilidad de que sea primo?

A) 1 B) 1/2 C) 1/3
D) 2/3 E) 3/5

29. Se lanza un par de dados. Si los números que resultan son diferentes, halla la probabilidad de que su suma sea impar.



A) 3/10 B) 3/5 C) 2/5
D) 2/15 E) 1/10

30. Se lanza 4 veces una moneda y una vez 2 dados, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 3 caras y una suma igual a 11?

A) 1/4 B) 1/18 C) 11/36
D) 1/72 E) 5/36

Claves

NIVEL 1
1. C
2. D
3. E
4. A
5. B
6. C
7. C
8. A
9. B
10. C

NIVEL 2
11. D
12. D
13. A
14. A
15. A
16. B
17. A
18. B
19. B
20. B

NIVEL 3
21. D
22. C
23. D
24. C
25. B
26. C
27. E
28. D
29. B
30. D

Lógica proposicional

> **Importante**
> Las exclamaciones y las preguntas no pueden evaluarse como verdaderas o falsas, luego no son consideradas proposiciones.



DEFINICIÓN

Es una parte de la lógica que tiene como objeto de estudio a las proposiciones y la relación existente entre ellas, así como la función que tienen las variables proposicionales y los conectivos lógicos.

PROPOSICIÓN

Es una expresión afirmativa, la cual puede ser verdadera (V) o falsa (F).

Ejemplos:
- El hexágono es una figura de 6 lados. (V)
- El mes de enero tiene 30 días. (F)
- 784 es un cuadrado perfecto. (V)

Clases de proposiciones

a) Proposición simple o atómica

Es aquella proposición que no presenta relación alguna con otra.

Ejemplos:
- Montevideo es la capital de Uruguay. (V)
- 125 es un cuadrado perfecto. (F)
- 111 es un número compuesto. (V)

Variable proposicional
Son todas aquellas letras minúsculas p; q; r; s; t;... que se usan en la representación simbólica de una proposición simple.

Ejemplos:
p: 41 es un número primo.
q: 28 es múltiplo de 4.
r: Buenos Aires es una ciudad de Europa.

> **Atención**
> Cuando una proposición simple o compuesta está referida solo a proposiciones matemáticas, entonces estas proposiciones se denominan **proposiciones matemáticas**.



b) Proposición compuesta o molecular

Se denomina así al conjunto de dos o más proposiciones simples, las cuales se relacionan mediante los **conectivos lógicos**.

Conectivos lógicos
Son aquellas expresiones que se emplean para relacionar dos o más proposiciones.

Conectivo lógico	Símbolo
no es cierto que	$\sim$
y	$\wedge$
o	$\vee$
si... entonces	$\Rightarrow$
... si y solo si...	$\Leftrightarrow$

Ejemplos:

- Carlos es ingeniero y Luis es abogado.
- Jaime ganó el partido o está enfermo.
- Si Juan trabaja entonces no ve televisión.

TABLAS DE VERDAD

Al calificar como verdadero (V) o falso (F) a una proposición, establecemos su valor de verdad, dichos valores se disponen en una tabla.

- Si hay una proposición se obtiene 2 valores de verdad.

p
V
F

$2^1 = 2$

- Si hay dos proposiciones se obtiene 4 valores de verdad.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

$2^2 = 4$

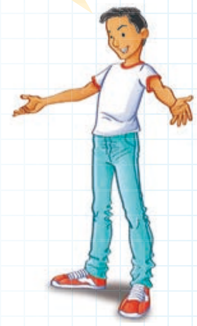
- Si hay tres proposiciones se obtiene 8 valores.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

$2^3 = 8$

Observación

El número de combinaciones de los valores de verdad (V, F) de las variables proposicionales está dado por 2^n donde n es el número de variables diferentes que contiene el esquema molecular.



OPERACIONES LÓGICAS

Son operaciones que utilizan proposiciones para transformarlas en otras, usando elementos determinados como conectivos lógicos (C.L.). Se tienen las siguientes operaciones lógicas.

Conjunción

Es aquella operación que vincula dos proposiciones mediante el conectivo lógico “y”, o alguna expresión equivalente.

Ejemplo:
8 es un número par y 13 es un número primo.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Recuerda

La conjunción es aquella operación que será verdadera solo si sus proposiciones componentes son verdaderas, en cualquier otro caso será falsa.



Disyunción

Es aquella operación que vincula dos proposiciones mediante el conectivo "o".
Esta operación puede ser:

a) Disyunción débil o inclusiva

Ejemplo:
Juan es deportista o estudia inglés.
(o: C.L.)

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

b) Disyunción fuerte o exclusiva

Ejemplo:
O Carlos está en Lima o está en Ica.
(O: C.L.; o: C.L.)

p	q	p ∆ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Recuerda

La disyunción débil es falsa solo si sus proposiciones componentes son falsas, en otro caso será verdadera. Mientras que la disyunción fuerte es falsa solo si sus componentes tienen igual valor veritativo, en caso contrario es verdadera.



Condicional

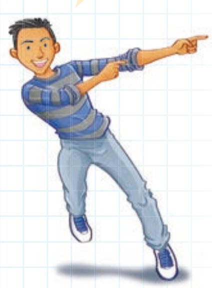
Es aquella operación que toma dos proposiciones, llamando a la primera **antecedente** y a la segunda **consecuente**, uniéndolas a través del conectivo: "Si... entonces..." o expresiones equivalentes.

Ejemplo:
Si Ana estudió, entonces dará un buen examen.
(Si: C.L.; entonces: C. L.)

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Recuerda

La condicional es falsa solo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, en los demás casos es verdadera. Mientras la bicondicional es verdadera solo si sus componentes tienen igual valor veritativo, en caso contrario será falsa.



Bicondicional

Es aquella que vincula dos proposiciones mediante el conectivo "...si y solo si..." o expresiones equivalentes.

Ejemplo:
Carlos estudia inglés si y solo si viaja al extranjero.
(si y solo si: C.L.)

p	q	p ⟺ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Negación

Es una operación que afecta a una proposición cambiándole su valor de verdad. Utiliza el adverbio "no".

Ejemplo:

Proposición: Ana viaja a Tarma.

Negación: Ana no viaja a Tarma.
(no: C.L.)

p	~p
V	F
F	V

EVALUACIÓN DE FÓRMULAS LÓGICAS

Evaluar una fórmula lógica por medio de la tabla de verdad, es obtener los valores del conectivo lógico principal a partir de los valores de verdad de cada una de las variables proposicionales.

Ejemplo:

Halla la tabla de verdad de: $\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow (p \vee q)$

Resolución:

p	q	$\sim$ (p	$\wedge$ q)	$\Longleftrightarrow$	(p $\vee$ q)
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F

↓ Conectivo principal

LEYES DEL ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son las diferentes equivalencias que se emplean para simplificar o reducir una fórmula lógica.

1. Ley de idempotencia

a) $p \wedge p \equiv p$

b) $p \vee p \equiv p$

2. Ley conmutativa

a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

b) $p \vee q \equiv q \vee p$

c) $p \Longleftrightarrow q \equiv q \Longleftrightarrow p$

3. Ley asociativa

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

4. Ley distributiva

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5. Leyes de Morgan

a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

6. Ley de involución

a) $\sim(\sim p) \equiv p$

7. Ley de absorción

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

c) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

d) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

8. Leyes condicionales

a) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

b) $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

9. Leyes bicondicionales

a) $p \Longleftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

b) $p \Longleftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

10. Leyes del complemento

a) $p \vee \sim p \equiv V$

b) $p \wedge \sim p \equiv F$

11. De la identidad

a) $p \wedge V \equiv p$

b) $p \wedge F \equiv F$

c) $p \vee V \equiv V$

d) $p \vee F \equiv p$

Ejemplo:

Simplifica la proposición: $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

Resolución:

$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$

$\equiv (\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)$ ...Ley distributiva

$\equiv V \wedge (\sim p \vee \sim q)$ ...Ley del complemento

$\equiv \sim p \vee \sim q$ ... Ley de la Identidad

$\therefore \sim p \vee (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Recuerda

Si una proposición es verdadera su negación es falsa y si una proposición es falsa su negación será verdadera.



Importante

Según los valores de verdad de la matriz principal tenemos 3 tipos de esquema:

Tautológico: cuando los valores resultan ser todos verdaderos.

Contradictorio: cuando los valores resultan ser todos falsos.

Contingente: cuando en la matriz se encuentran valores verdaderos y falsos.



Nota

Para verificar estas leyes solo debemos emplear las tablas de verdad.

Ejemplo:

$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	p	$\Rightarrow$	q	$\sim$q	$\Rightarrow$	$\sim$p
V	V		V		F	V	F
V	F		F		V	F	F
F	V		V		F	V	V
F	V		V		V	V	V

De la tabla de verdad se observa que los valores de verdad de la matriz principal son los mismos.

$\therefore$ **$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$**

Problemas resueltos

1 Si p es verdadero (V), q es falso (F) y r verdadero (V), determina el valor de verdad de: $(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \Rightarrow r)$

Resolución:

Reemplazando los valores de verdad en:

$$(p \wedge q) \Longleftrightarrow (q \Rightarrow r)$$
$$V \wedge F \qquad F \Rightarrow V$$
$$F \quad \Longleftrightarrow \quad V$$
$$F$$

$\therefore$ El valor de verdad es F.

2 Determina la tabla de verdad de la siguiente proposición: $[(p \vee q) \Rightarrow \sim q] \Rightarrow p$

Resolución:

Elaborando la tabla de verdad:

p	q	[(p ∨ q)	⇒	~q]	⇒	p
V	V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F	F

3 Evalúa la proposición y establece si se trata de una tautología, contradicción o contingencia.

$$[\sim(\sim p \wedge q) \ \wedge \ q] \Rightarrow q$$

Resolución:

Elaborando la tabla de verdad:

p	q	[~	(~p	∧	q)	∧	q]	⇒	q
V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V	F

$\therefore$ Se trata de una tautología.

4 Si la proposición: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow s)$ es falsa, halla el valor de verdad de p; q; r y s.

Resolución:

$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow s) \equiv F$

La condicional es falsa solo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso.

Luego:

$$(p \wedge \sim q) \equiv V \qquad (r \Rightarrow s) \equiv F$$
$$V \quad F \qquad\qquad V \quad F$$

$\therefore p \equiv V;\ q \equiv F;\ r \equiv V$ y $s \equiv F$

5 Sabiendo que: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv F$

Determina el valor de verdad de: $[\sim p \vee q] \wedge \sim r$

Resolución:

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv F$

$\quad V \quad F$

$V \quad F$

Luego: $p \equiv V;\ q \equiv V$ y $r \equiv F$

Reemplazando:

$$[\sim p \vee q] \wedge \sim r$$
$$[\sim V \vee V] \wedge \sim F$$
$$[F \vee V] \wedge V$$
$$V \quad \wedge V$$
$$V$$

$\therefore$ La proposición es V.

6 Determina si la proposición:

$[p \wedge \{p \Rightarrow \{q \wedge (q \Rightarrow r)]\}] \wedge \sim q$ es una tautología; contradicción o contingencia.

Resolución:

Elaborando la tabla de verdad:

p	q	r	[p	∧	{p	⇒	[q	∧	(q ⇒ r)]}]	∧	~q
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V
F	F	F	F	F	F	V	F	F	V	F	V

$\therefore$ Se trata de una contradicción.

7 Simplifica la proposición:
$(p \Rightarrow \sim q) \vee [\sim(p \wedge q) \wedge r]$

Resolución:

$$\begin{aligned} & (p \Rightarrow \sim q) \vee [\sim(p \wedge q) \wedge r] \\ \equiv\ & (\sim p \vee \sim q) \vee [\sim(p \wedge q) \wedge r] \\ \equiv\ & \sim(p \wedge q) \vee [\sim(p \wedge q) \wedge r] \\ \equiv\ & \sim(p \wedge q) \end{aligned}$$

8 Simplifica:
$(q \Rightarrow \sim p) \wedge (p \wedge q)$

Resolución:

$$\begin{aligned} & (q \Rightarrow \sim p) \wedge (p \wedge q) \\ \equiv\ & (\sim q \vee \sim p) \wedge (p \wedge q) \\ \equiv\ & \sim (q \wedge p) \wedge (p \wedge q) \\ \equiv\ & \sim (p \wedge q) \wedge (p \wedge q) \\ \equiv\ & F \end{aligned}$$

9 Simboliza:
"Canto o juego. No canto. Por tanto juego".

Resolución:

p: canto.

q: juego.

"Canto o juego o no canto. Por tanto juego".

$[(p \vee q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow q$

10 Simboliza:
"Si hablo, me escuchas. No me escuchas. Entonces no hablo".

Resolución:

p: hablo

q. me escuchas

"Si hablo, me escuchas. No me escuchas. Entonces no hablo".

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

11 Se define el operador lógico $\heartsuit$, según la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \heartsuit q$
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Entonces al simplificar la siguiente fórmula lógica:
$(p \heartsuit q) \heartsuit [(\sim q \vee p) \heartsuit (p \Rightarrow q)]$, se obtiene:

Resolución:

De la tabla de verdad se observa:
$(q \heartsuit p) \equiv (p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$
$\equiv p \vee \sim q \equiv \sim q \wedge p$
Luego:
$(p \heartsuit q) \heartsuit [(\sim q \vee p) \heartsuit (p \Rightarrow q)]$
$\equiv (\sim p \wedge q) \heartsuit [(\sim q \vee p) \heartsuit (\sim p \vee q)]$
$\equiv (\sim p \wedge q) \heartsuit [\sim(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q)]$
$\equiv \sim(\sim p \wedge q) \wedge [(q \wedge \sim p) \wedge (\sim p \vee q)]$
$\equiv (p \vee \sim q) \wedge [q \wedge \underbrace{\{\sim p \wedge (\sim p \vee q)\}}_{\sim p}]$
$\equiv (p \vee \sim q) \wedge [q \wedge \sim p]$
$\equiv (p \vee \sim q) \wedge \sim(p \vee \sim q) \equiv m \wedge \sim m \equiv F$

12 La siguiente expresión no es falsa.
Si Juan no está enfermo o estudia el sábado en la noche, entonces está enfermo.
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

I. Juan estudia el sábado en la mañana.
II. Juan está enfermo.
III. Juan no estudia el sábado.
IV. Juan va al médico.

Resolución:

p: Juan está enfermo.
q: Juan estudia el sábado en la noche.
$\Rightarrow$ "Si $\underbrace{\underbrace{\text{no p}}_{\sim p} \text{ o q}}_{(\sim p \vee q)}$ entonces p"

$\equiv (\sim p \vee q) \Rightarrow p$
$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee p$
$\equiv (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee p$
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee p \equiv p \equiv V$

$\Rightarrow$ Juan está enfermo.

Actividades de razonamiento

1. Determina la matriz principal de la siguiente proposición: $[(p \vee q) \Rightarrow q] \Leftrightarrow q$

A) VVVV B) VVFV C) VVFF D) VVVF E) FVVV

2. Del resultado de la tabla de verdad del siguiente esquema molecular: $(p \,\Delta\, t) \Rightarrow (q \Rightarrow t)$ se tiene que la diferencia entre la cantidad de verdades y falsedades es:

A) 4 B) 8 C) 6 D) 3 E) 2

3. Sean las proposiciones p; q; r; s y t donde:
$p \Leftrightarrow q$ es falsa
$q \vee r$ es verdadera
$r \wedge s$ es falsa
$s \Rightarrow t$ es falsa
Determina los valores de verdad de dichas proposiciones.

A) FVFVV B) FVFVF C) FVVFV D) FVFFV E) FVVVF

4. Sabiendo que $p \equiv V$ y la proposición:
$[(r \vee \sim q) \wedge (p \vee s)] \Rightarrow (\sim r \vee q)$ es falsa.
Halla los valores de q y r respectivamente.

A) VF B) FV C) FF D) VV E) N. A.

5. Si la proposición: $[(\sim p \vee q) \vee \sim r]$ es falsa.
Halla el valor de verdad de:
I. $(p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q)$
II. $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
III. $(\sim p \vee \sim r) \Rightarrow (p \wedge \sim r)$

A) VFF B) VVV C) FVV D) VFV E) FFF

6. De los siguientes esquemas moleculares, ¿cuáles son tautologicos?
I. $\sim(p \vee q) \vee \sim q$
II. $[(q \vee \sim r) \wedge q] \Leftrightarrow q$
III. $\sim[\sim q \wedge (p \vee q)] \Rightarrow (\sim p \vee r)$

A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) II y III E) Todas

7. El valor de verdad de las proposiciones p; q y r son respectivamente: V; F y F. Indica el valor de verdad de las proposiciones:
I. $(p \vee q) \wedge \sim r$
II. $[(p \vee q) \wedge (q \vee r)] \vee r$
III. $[(p \wedge r) \vee \sim q] \wedge \sim p$

A) VFV B) VVV C) VFF D) FVV E) FFV

8. De la tabla de verdad de: $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee r)] \Rightarrow (\sim p \vee r)$
Indica cuántas V y cuántas F hay.

A) 7; 1 B) 1; 7 C) 0; 8 D) 8; 0 E) 4; 4

9. Simplifica la siguiente proposición:

$\sim[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim q] \vee q$

A) p B) q C) $\sim p$ D) $\sim q$ E) $p \wedge q$

10. Simplifica:

$[(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim(r \wedge \sim r)] \wedge \sim q$

A) $\sim q$ B) q C) p D) $\sim p$ E) $p \vee q$

11. Simplifica:

$\sim\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\}$

A) $\sim(p \vee q)$ B) $\sim(p \wedge q)$ C) $p \wedge q$
D) $p \vee q$ E) $\sim p \wedge q$

12. Simboliza:

Si Ana trabaja o viaja, no trabaja. En consecuencia viaja.

A) $[(p \vee q) \Rightarrow \sim q] \Rightarrow p$ B) $[(p \vee q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow p$
C) $[(p \vee q) \Rightarrow \sim p] \Rightarrow q$ D) $[(p \vee q) \Rightarrow \sim q] \Rightarrow q$
E) N. A.

13. Simboliza:

Luis va al cine si tiene dinero.
No tiene dinero. Por lo tanto no va al cine

A) $[(q \Rightarrow p) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim q$ B) $[(q \Rightarrow p) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
C) $[(q \Rightarrow p) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim q$ D) $[(q \Rightarrow p) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim p$
E) N. A.

14. Simboliza:

Giuliana es bonita pero no es feliz.
Es joven o es feliz. Entonces Giuliana es bonita.

A) $[(p \wedge \sim q) \wedge (q \vee r)] \Rightarrow p$
B) $[(p \wedge \sim q) \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow p$
C) $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r)] \Rightarrow p$
D) $[(p \wedge \sim q) \vee (q \vee r)] \Rightarrow p$
E) N. A.

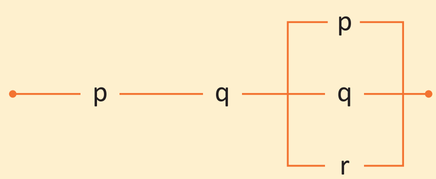
Claves

1. D	5. D	9. B	13. B
2. C	6. B	10. A	14. A
3. B	7. C	11. B	
4. B	8. D	12. C	

Reto

Dado el siguiente circuito:





Su equivalente es:

Rpta.: $p \wedge q$

Refuerza practicando

NIVEL 1

Evalúa las siguientes fórmulas lógicas e índica el tipo de esquema molecular.

1. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

A) Tautología B) Contingencia
C) Contradicción D) Conjunción
E) Condicional

2. $[(p \wedge q) \vee q] \wedge \sim q$

A) Contingencia B) Tautología
C) Contradicción D) Conjunción
E) Condicional

3. $(p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow q)$

A) Conjunción B) Contradicción
C) Tautología D) Contingencia
E) N. A.

4. $(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

A) Conjunción B) Contingencia
C) Contradicción D) Condicional
E) Tautología

5. $(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q)$

A) Contingencia B) Tautología
C) Contradicción D) Conjunción
E) Condicional

6. $\sim q \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge \sim p]$

A) Tautología B) Contradicción
C) Contingencia D) Conjunción
E) Condicional

7. $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

A) Conjunción B) Contingencia
C) Contradicción D) Tautología
E) Condicional

8. $(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$

A) Tautología B) Contingencia
C) Conjunción D) Condicional
E) Contradicción

9. $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim q \vee p)$

A) Contradicción B) Contingencia
C) Tautología D) Condicional
E) Conjunción

NIVEL 2

De la falsedad de: $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow \sim s)$; halla el valor de verdad de:

10. $\sim(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$

A) Falso B) Falta p C) Falta s
D) Verdadero E) Falta r

11) $\sim(\sim r \wedge s) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$

A) Falta s B) Falta p C) Falso
D) Falta r E) Verdadero

12) $p \Rightarrow \sim[q \Rightarrow \sim(s \Rightarrow r)]$

A) Falta s B) Falso C) Verdadero
D) Falta r E) Falta p

Halla el valor de verdad en las siguientes proposiciones lógicas:

13) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$; $r = V$

A) Verdadero B) Falso C) Falta q
D) Falta r E) Falta p

14) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$; $q = V$

A) Falta r B) Falta q C) Falso
D) Falta p E) Verdadero

15) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$; $p = V$ y $r = F$

A) Falso B) Verdadero C) Falta r
D) Falta q E) Falta p

16) $p \wedge (q \Rightarrow r)$; $r = V$

A) Falta p B) Falta q C) Falta r
D) Falso E) Verdadero

17) Simplifica la siguiente proposición:

$\sim[\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow p] \vee q$

A) $p \Leftrightarrow q$ B) $p \wedge q$ C) $p \vee q$
D) $\sim p \wedge q$ E) $p \Rightarrow q$

18) Simplifica la siguiente proposición: $(p \vee q) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

A) $p \vee q$ B) $\sim p$ C) $p \wedge q$
D) $\sim p \wedge q$ E) $\sim q$

NIVEL 3

19) Cuando los gallos no cantan, no llueve o no hace sol.

A) $p \Leftrightarrow q$ B) $\sim r \vee \sim q$
C) $\sim r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$ D) $r \Rightarrow \sim q$
E) $p \Rightarrow r$

20) Llueve y los gallos no cantan o bien hace sol y los gallos no cantan.

A) $(p \vee \sim r) \wedge q$ B) $(p \wedge \sim r) \vee q$
C) $p \Rightarrow q$ D) $(p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r)$
E) $(p \vee q) \Rightarrow r$

21) Las estrellas emiten luz o los planetas la reflejan y, por otra parte, los planetas giran alrededor de ellas.

A) $\sim r \wedge q$ B) $(p \Rightarrow q) \vee r$ C) $p \Leftrightarrow r$
D) $r \vee q$ E) $(p \vee q) \wedge r$

22) Si las estrellas emiten luz, entonces los planetas la reflejan y giran alrededor de ellas.

A) $p \Rightarrow r$ B) $(p \vee r) \Rightarrow q$ C) $\sim p \wedge q$
D) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ E) $p \Rightarrow q$

23. Si Pablo no atiende en clase o no estudia en casa, fracasará en los exámenes y no será aplaudido.

A) $(p \vee q) \Rightarrow \sim s$
B) $p \Rightarrow (\sim r \vee s)$
C) $(r \vee s) \Rightarrow q$
D) $(\sim p \wedge q) \vee r$
E) $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim s)$

24. Si no es el caso que Pablo atiende en clase y estudia en casa, entonces fracasará en los exámenes o no será aplaudido.

A) $(p \wedge q) \Rightarrow \sim s$
B) $(p \vee q) \Rightarrow r \vee \sim s$
C) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee \sim s)$
D) $(p \vee q) \Rightarrow \sim s \vee r$
E) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow s$

25. Pablo atiende en clase y estudia en casa o, por otra parte, fracasa en los exámenes y no es aplaudido.

A) $(p \wedge q) \vee (r \wedge \sim s)$
B) $(p \wedge q) \Rightarrow r \vee s$
C) $p \Rightarrow r \vee s$
D) $(p \wedge q) \wedge (r \vee \sim s)$
E) $(p \vee q) \Rightarrow r \vee \sim s$

26. Únicamente si Pablo atiende en clase y estudia en casa, no se dará que fracase en los exámenes y no sea aplaudido.

A) $(p \wedge q) \Rightarrow r \wedge s$
B) $(p \vee q) \Rightarrow \sim r \wedge s$
C) $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim r$
D) $(p \vee q) \Leftrightarrow s$
E) $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim(r \wedge \sim s)$

27. Si $x = 1$ e $y = 2$, entonces $z = 3$, si $y = 2$, $z = 3$, entonces $w = 0$; $x = 1$. Por consiguiente, $w = 0$.

A) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim r \wedge s)$
B) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee \sim s)$
C) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$
D) $\{[(p \vee q) \Rightarrow r] \wedge [(q \Rightarrow r) \Rightarrow s]\}$
E) $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(q \Rightarrow r) \Rightarrow s] \wedge p\} \Rightarrow s$

28. Si Φ es un operador lógico definido mediante la siguiente tabla de verdad.

p	q	$p \Phi q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Entonces al simplificar la proposición:
$(p \Phi q) \Phi (q \Phi p)$, se obtiene:

A) $p \Leftrightarrow q$
B) $p \vee q$
C) $p \wedge q$
D) $\sim p \wedge q$
E) $p \Rightarrow q$

Claves

NIVEL 1	8. E	15. D	22. D
1. A	9. B	16. A	23. E
2. C	**NIVEL 2**	17. E	24. C
3. D	10. A	18. B	25. A
4. E	11. E	**NIVEL 3**	26. E
5. B	12. B	19. C	27. E
6. C	13. A	20. D	28. B
7. D	14. C	21. E	

Psicotécnico

DEFINICIÓN

Los test psicotécnicos son pruebas que permiten apreciar aptitudes o capacidades, tales como: inteligencia general, memoria, percepción o atención.

Ejemplo 1:

¿Qué figura continúa?

1	3
2	

,

3	1
	2

,

	2
3	1

,

?	

A)

2	
1	3

B)

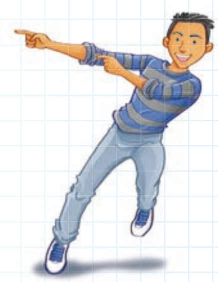
2	1
3	

C)

	2
1	3

D)

2	1
	3



Resolución:
El número 1 gira en sentido horario, mientras que el 2 y 3 giran en sentido antihorario.
La alternativa correcta es la A.

Ejemplo 2:

¿Cuántos números 5 hay en la siguiente sopa de números?

1	3	5	7	8	6	1	2
5	0	2	3	5	0	1	9
7	5	8	1	6	3	9	9
0	7	3	5	0	5	3	9
2	2	4	5	1	3	2	1
3	9	2	3	4	9	5	0

A) 6 B) 7 C) 8 D) 5 E) 9

Resolución:
Ocho veces se repite el número 5 en la sopa de números. Alternativa C.

Atención

En las sucesiones compuestas por las letras del alfabeto no se toman en cuenta las letras Ch y Ll, a no ser que se indique lo contrario.



TIPOS DE TEST

Desarrollaremos solo algunos de los tantos tipos de test psicotécnicos.

Test de aptitud verbal

Se miden por medio de ejercicios de sinónimos, antónimos, analogías, etc.

Ejemplo:

Señala la palabra que no corresponde al grupo:

A) Talón B) Codo C) Hombro
D) Brazo E) Rodilla

Resolución:
Son articulaciones que unen partes de nuestro cuerpo a excepción del brazo.
Alternativa D.

Test de aptitudes numéricas

Se trata de operaciones elementales y problemas sencillos de razonamiento numérico.

Ejemplo:
En el siguiente cuadro, haciendo una operación, dos de los números de cada fila dan como resultado un tercero. ¿Qué números faltan en el cuadro?

6	2	4
2	?	0
?	0	4

A) 3 y 1 B) 4 y 2 C) 2 y 0 D) 4 y 3 E) 5 y 3

La operación es una resta. Los números que faltan son el 4 y 2. Alternativa B.

Atención

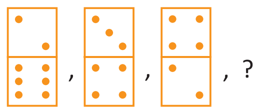
Para resolver una serie en un examen psicotécnico, debes ver cómo se relacionan las figuras o números que conforman dicha serie y así encontrarás el siguiente elemento.

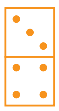
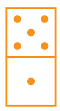
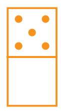
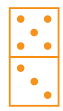
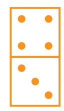


Test de aptitudes de razonamiento abstracto

Se trata de secuencias de números, secuencias de figuras, test de dominó, monedas, etc.

Ejemplo:
¿Qué figura continúa?



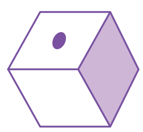
A)  B)  C)  D)  E) 

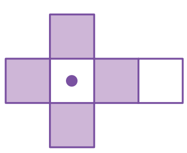
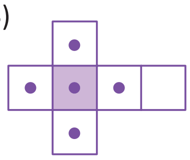
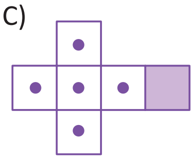
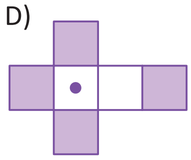
La fila superior aumenta de 1 en 1, mientras que la inferior disminuye de 2 en 2. Alternativa C.

Test de aptitudes de razonamiento espacial

Se trata de secuencias con figuras espaciales y su desarrollo en el plano.

Ejemplo:
¿Qué figura es el desarrollo del siguiente solido?



A)  B)  C)  D) 

Resolución:
Al desarrollar el solido, vemos que la alternativa correcta es la D.

Problemas resueltos

1 ¿Qué letra continua en la sucesión?

A; D; G; J; ...

A) M B) N C) L
D) P E) O

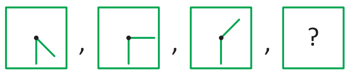
Resolución:

A ; D ; G ; J ; M

BC EF HI KL
2 2 2 2

Clave A

2 Halla la figura que continúa:



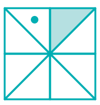
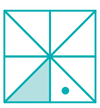
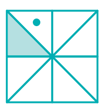
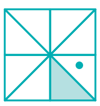
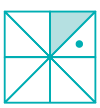
A)  B)  C) 
D)  E) 

Resolución:

La manecilla inferior permanece estática, mientras que la otra avanza en sentido antihorario.

Clave B

3 Halla la figura que no corresponde:

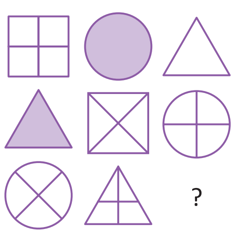
A)  B)  C) 
D)  E) 

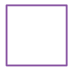
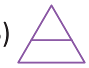
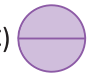
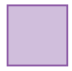
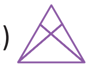
Resolución:

El punto se ubica siempre a la derecha de la parte sombreada, a excepción de la opción A.

Clave A

4 Halla la figura que falta:



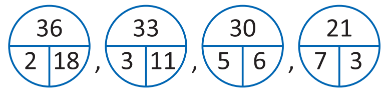
A)  B)  C) 
D)  E) 

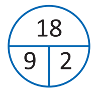
Resolución:

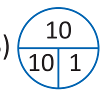
En cada fila y en cada columna hay un cuadrado, un triángulo y un círculo, entonces en la posición que falta debe ir un cuadrado.

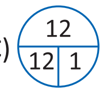
Clave D

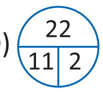
5 Halla la figura que continúa.

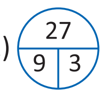


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Resolución:

Podemos distinguir dos sucesiones. La primera está compuesta por los cuatro primeros números primos.

2; 3; 5; 7; x ⇒ x = 11

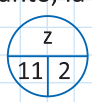
La segunda sucesión es:

18; 11; 6; 3; y ⇒ y = 2

7 5 3 1

2 2 2

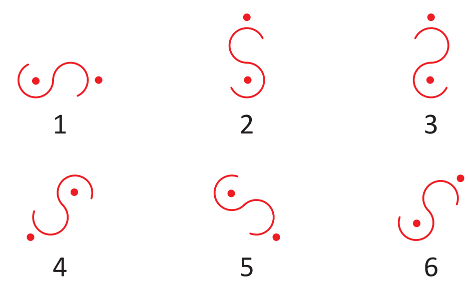
Por lo tanto, la figura que continúa es:



$z = 11 \times 2$
$z = 22$

La respuesta es la alternativa D.

6 ¿Cuál de las figuras no guarda relación con las demás?



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

Podemos darnos cuenta de que todas las figuras son congruentes, a excepción de la figura 3, la cual no proviene de un giro de la figura patrón, sino proviene de un reflejo tal como podemos ver a continuación:

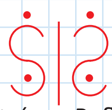
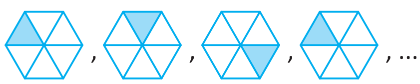


Figura patrón Reflejo

Por lo tanto, la respuesta es la alternativa B.

7 ¿Qué figura continúa?

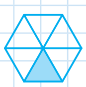


A)  B)  C) 
D)  E) 

Resolución:

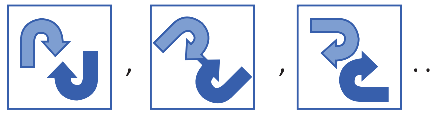
El triángulo sombreado gira en sentido horario. De la primera a la segunda figura avanzó una posición; de la segunda a la tercera avanzó dos posiciones; de la tercera a la cuarta avanzó tres posiciones.

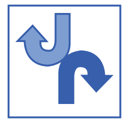
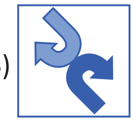
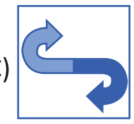
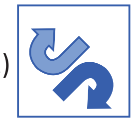
Por lo tanto, de la cuarta a la quinta figura avanzará cuatro posiciones, resultando la siguiente figura:



Entonces: alternativa A.

8 ¿Qué figura completa la siguiente secuencia?

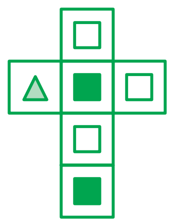


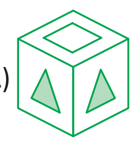
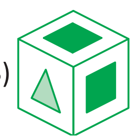
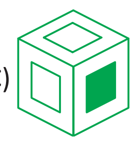
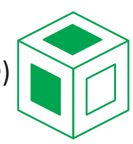
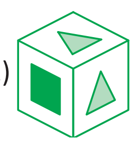
A)  B)  C) 
D)  E) 

Resolución:

Ambas flechas giran en sentido antihorario un ángulo de 45° por cuadro, por lo tanto la alternativa correcta será la B.

9 ¿Qué sólido proviene de la siguiente figura?



A)  B)  C) 
D)  E) 

Resolución:

Cuando armamos el sólido vemos que las caras que contienen los cuadrados verdes no pueden ser contiguas, además no existen dos caras que contengan triángulos; por lo tanto la alternativa correcta será la C.

Actividades de razonamiento

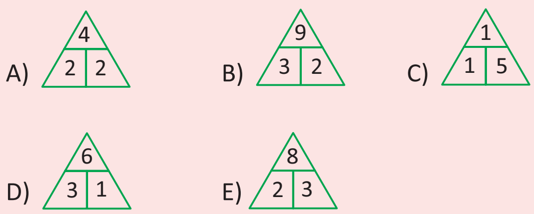
1. Completa la siguiente serie:
1; N; 3; Q; 9; T; 27; ... ; ...

A) X; 243 B) V; 54 C) W; 81
D) X; 81 E) W; 243

2. Si el ayer de anteayer del día anterior de pasado mañana es el ayer del martes. ¿Qué día es el mañana del pasado mañana del día posterior del anteayer?

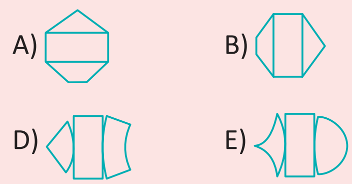
A) Lunes B) Sábado C) Martes
D) Viernes E) Jueves

3. Una de las figuras no guarda relación con las demás:

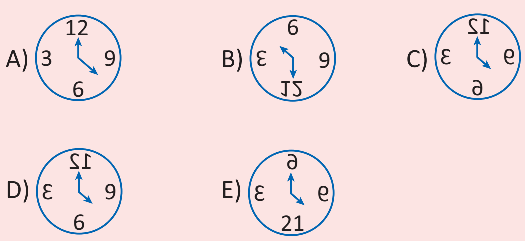


4. ¿Cuál de las alternativas corresponde al desarrollo del siguiente sólido?

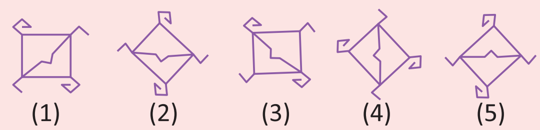




5. Indica la figura que se observa al colocar un reloj delante de un espejo.

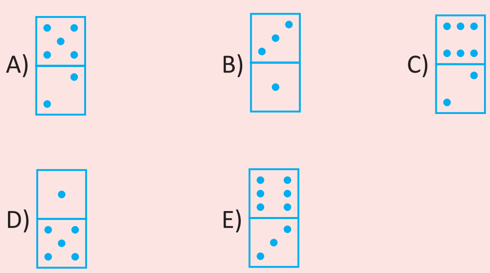


6. De las cinco figuras que se presentan a continuación, dos son congruentes. Indica cuáles son:

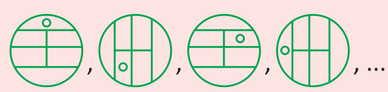


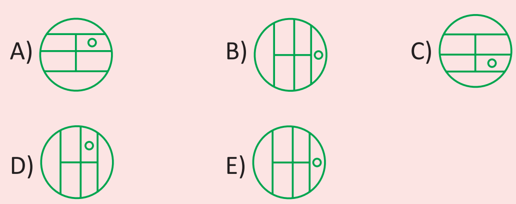
A) 1 y 3 B) 2 y 4 C) 1 y 5
D) 2 y 5 E) 2 y 3

7. Para que la suma de los puntos de la parte superior sea igual a la suma de los puntos de la parte inferior, ¿qué ficha debe invertirse?

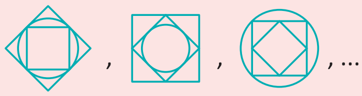


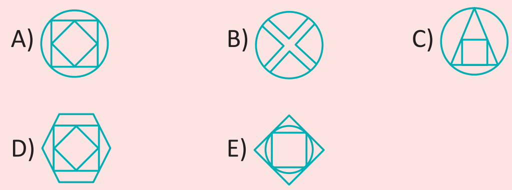
8. ¿Qué figura continúa?



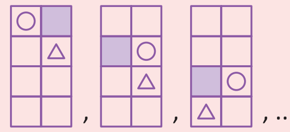


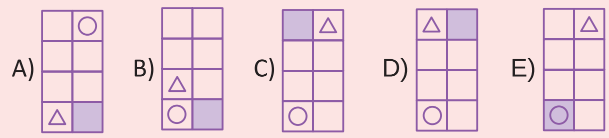
9. Halla la figura que continúa:



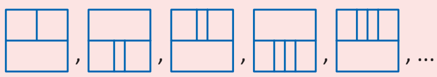


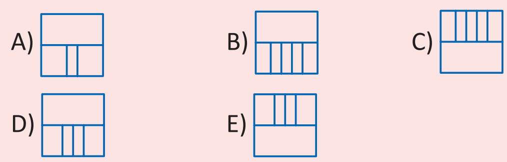
10. Halla la figura que continúa.





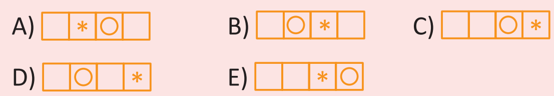
11. ¿Qué figura continúa?



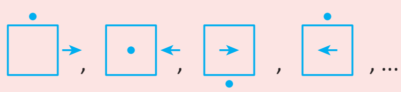


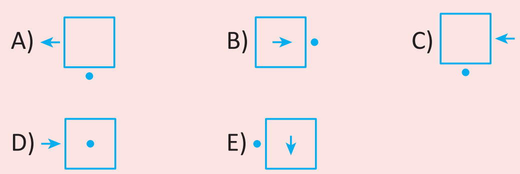
12. ¿Qué figura continúa?





13. El gráfico que sigue es:





14. Halla las figuras que continúan en los recuadros vacíos.

X	O	X	O	O	X	O	O	O	X	O	O	O	O			

A) XXX B) OXO C) XXO
D) OXX E) XOO

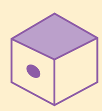
Claves

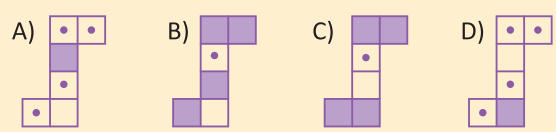
1. C
2. D
3. D
4. D
5. C
6. B
7. C
8. C
9. E
10. B
11. B
12. C
13. D
14. E

Reto

¿Qué figura es el desarrollo del siguiente sólido?





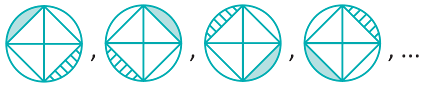


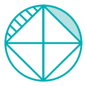
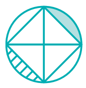
Rpta.: C

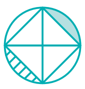
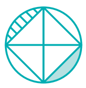
Refuerza practicando

NIVEL 1

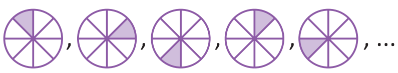
1. Halla la figura que continúa.

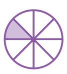


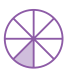
A)  B)  C) 

D)  E) 

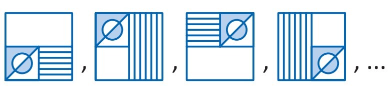
2. ¿Qué figura sigue en la siguiente sucesión?

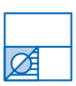
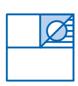


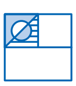
A)  B)  C) 

D)  E) 

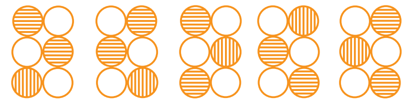
3. ¿Qué figura continúa?



A)  B)  C) 

D)  E) 

4. ¿Cuál es la figura que no guarda relación con las demás?

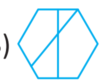
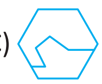


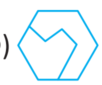
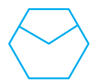
1 2 3 4 5

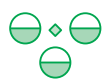
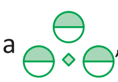
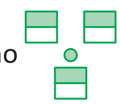
A) 4 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

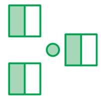
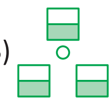
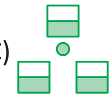
5. ¿Qué figura continúa?

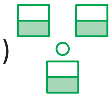
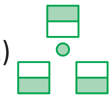


A)  B)  C) 

D)  E) 

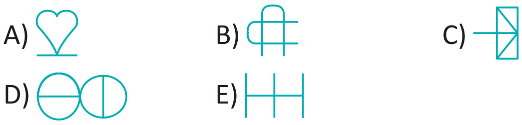
6.  es a , como  es a:

A)  B)  C) 

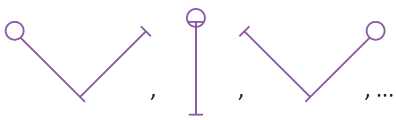
D)  E) 

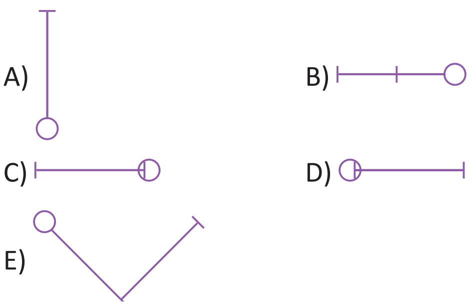
7. ¿Qué figura continúa?



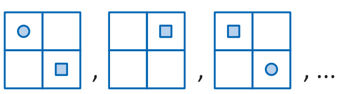


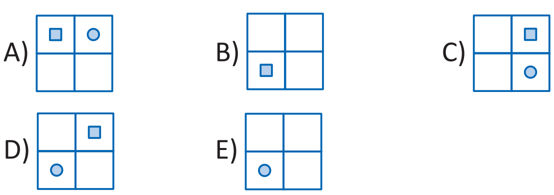
8. ¿Qué figura sigue?



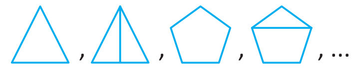


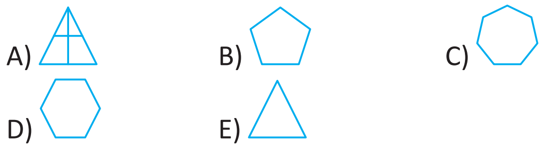
9. ¿Qué figura sigue?





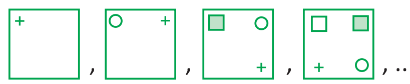
10. Halla la figura que sigue.

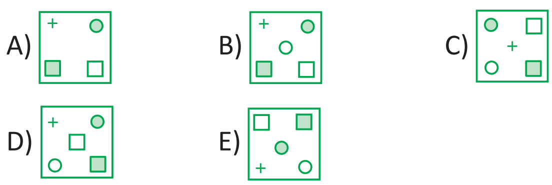




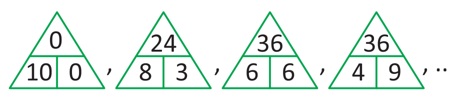
NIVEL 2

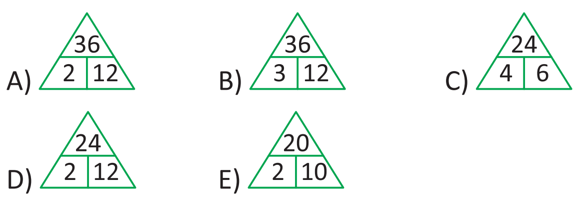
11. Halla la figura que continúa.



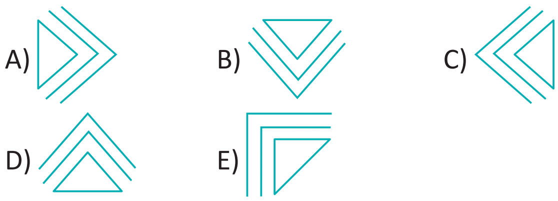


12. Halla la figura que continúa.





13.  es a , como  es a:



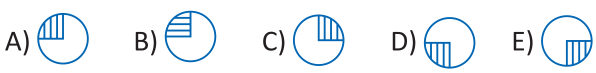
14. Halla la figura que sigue.



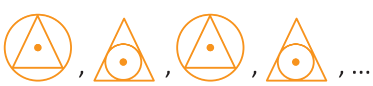


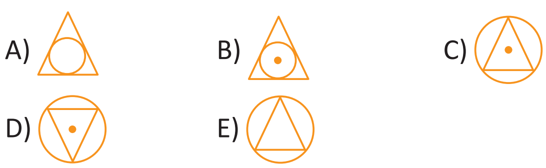
15. Halla la figura que sigue.



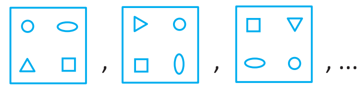


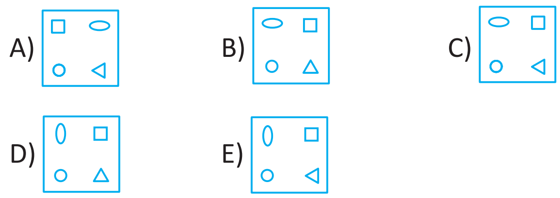
16. Halla la figura que sigue.



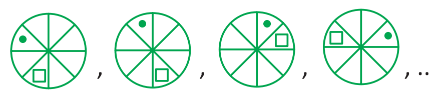


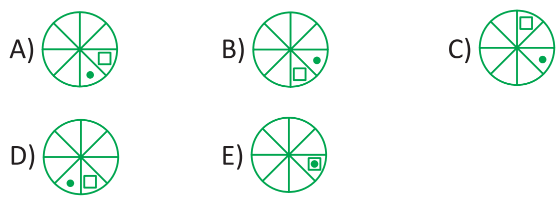
17. ¿Qué figura continúa en la siguiente sucesión?



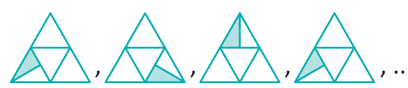


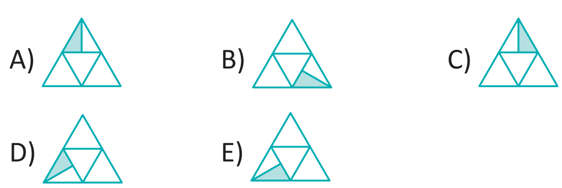
18. Halla la figura que sigue.



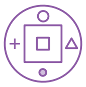


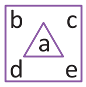
19. Halla la figura que falta.



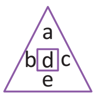


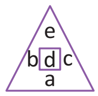
20) 

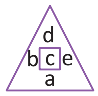
es a 

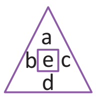
como 

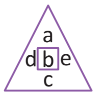
es a:

A) 

B) 

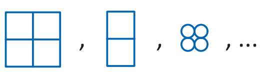
C) 

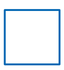
D) 

E) 

NIVEL 3

21) Halla la figura que sigue.



A)  B)  C)  D)  E) 

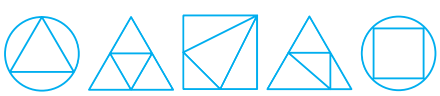
22) ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



1 2 3 4 5

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

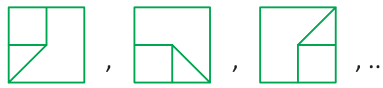
23) ¿Qué figura no guarda relación con las demás?

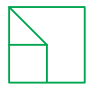
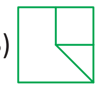
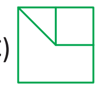


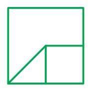
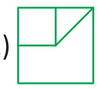
1 2 3 4 5

A) 4 B) 3 C) 2 D) 1 E) 5

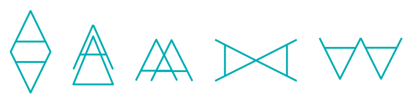
24) Halla la figura que completa la siguiente sucesión.



A)  B)  C) 

D)  E) 

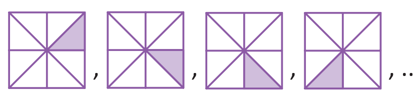
25) ¿Qué figura no tiene relación con las demás?

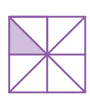
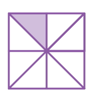
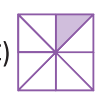


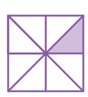
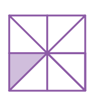
1 2 3 4 5

A) 1 B) 3 C) 5
D) 2 E) 4

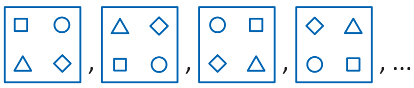
26) Halla la figura que sigue.

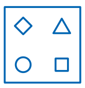


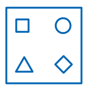
A)  B)  C) 

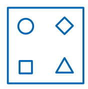
D)  E) 

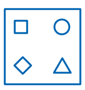
27. Halla la figura que falta.

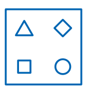


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

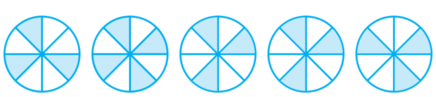
28. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



1 2 3 4 5

A) 2 B) 3 C) 5 D) 1 E) 4

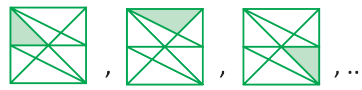
29. Indica la figura que no corresponde con las demás.

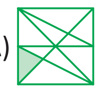


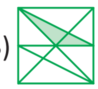
1 2 3 4 5

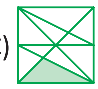
A) 5 B) 4 C) 1 D) 2 E) 3

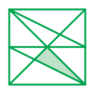
30. Halla la figura que sigue.

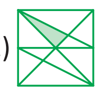


A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

Claves

NIVEL 1	9. B	17. E	25. D
1. A	10. C	18. E	26. E
2. C	NIVEL 2	19. B	27. B
3. E	11. C	20. A	28. B
4. E	12. A	NIVEL 3	29. D
5. C	13. B	21. D	30. C
6. C	14. A	22. E	
7. E	15. B	23. E	
8. B	16. C	24. C	

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres de la Industria Gráfica Cimagraf S.A.C.
Psje. Santa Rosa 220 - 226 N.º 220, Lima - ATE
RUC 20136492277